الرياضيات

الأستاذ

محمد حميد



0770 710 5007



t.me/mohhmath

2021

الثالث المتوسط

الجزء الثاني

4 الهندسة الاحداثية

5 الهندسة والقياس

6 الاحصاء والاحتمالات

الأستاذ محمد حميد

الفصل الرابع

الهندسة الإحداثية



الفصل الرابع

الهندسة الاحداثية

فكرة الدرس : تمثيل المعادلة الخطية في المستوي الاحداثي .

تمثيل المعادلة التربيعية في المستوي الاحداثي .

المفردات :

- الزوج المرتب
- المعادلة الخطية
- المستوى الاحداثي
- المعادلة التربيعية

التمثيل البياني للمعادلات في المستوي الاحداثي

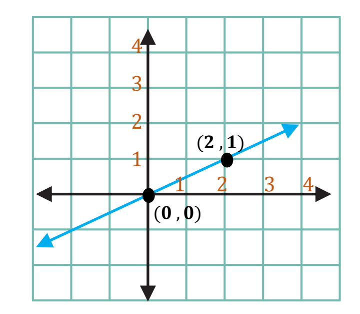
أولاً : التمثيل البياني للمعادلة الخطية في المستوى الاحداثي : الصيغة العامة لها $ax + by + c = 0$

حيث نقوم بفرض قيم لـ x ولتكن $(0 , 1 , 2)$ وتعويضها في المعادلة المعطاة ، وفي حالة كون المعادلة بدلالة المتغير x فقط فإننا نقوم بفرض قيم لـ (y) ولتكن مثلا $(0 , 1 , 2)$.

مثال : مثل المعادلة $2y - x = 0$ في المستوي الاحداثي :

الحل :

x	$2y - x = 0$	(x , y)
0	$2y - 0 = 0 \Rightarrow 2y = 0$ $\frac{2y}{2} = \frac{0}{2} \Rightarrow y = 0$	$(0 , 0)$
2	$2y - 2 = 0 \Rightarrow 2y = 2$ $\frac{2y}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow y = 1$	$(2 , 1)$



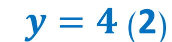
مثال : مثل المعادلات التالية في المستوي الاحداثي ، ماذا تلاحظ :

1) $y - 3x + 5 = 0$
2) $y = 4$
3) $x = -3$

الحل : $y - 3x + 5 = 0$ (1)

x	$2y - x = 0$	(x , y)
0	$y - 3(0) + 5 = 0$ $y - 0 + 5 = 0 \Rightarrow y = -5$	$(0 , -5)$
2	$y - 3(2) + 5 = 0$ $y - 6 + 5 = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$	$(2 , 1)$

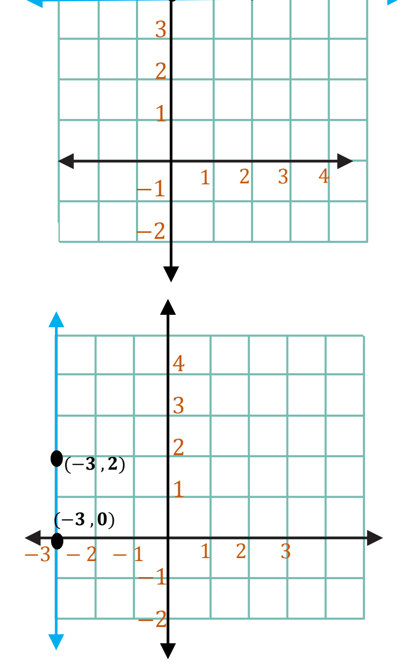
المستقيم يقطع محور السينات والصادات ولا يمر بنقطة الاصل .



$y = 4$ (2)

x	$y = 4$	(x , y)
0	$y = 4$	$(0 , 4)$
2	$y = 4$	$(2 , 4)$

المستقيم يوازي محور السينات وعمودي على الصادات.



$x = -3$ (3)

y	$x = -3$	(x , y)
0	$x = -3$	$(-3 , 0)$
2	$x = -3$	$(-3 , 2)$

المستقيم يوازي محور الصادات وعمودي على السينات .

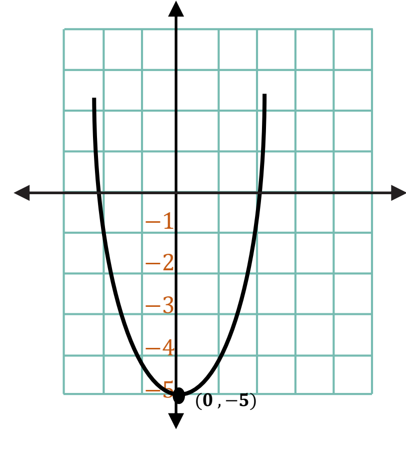
ثانيا : التمثيل البياني للمعادلة التربيعية في المستوي الاحداثي : الصيغة العامة لها $y = ax^2 + bx + c$

حيث أن $a , b , c \in R$ ، $a \neq 0$

نقوم بفرض قيم لـ x ولتكن $(-2 , -1 , 2 , 1 , 0)$ حيث أن الشكل يكون $\cup$ اذا كان معامل x^2 موجب ويكون الشكل $\cap$ اذا كان معامل x^2 سالب .

مثال : مثل المعادلة $y = 2x^2 - 5$

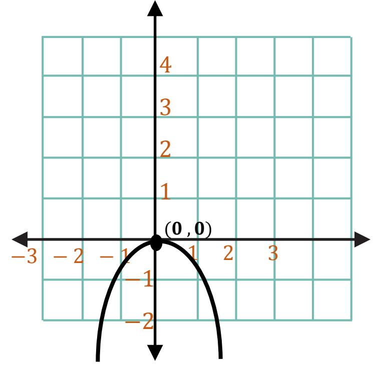
الحل :



x	$y = 2x^2 - 5$	(x , y)
0	$y = 2(0)^2 - 5 = 0 - 5 = -5$	$(0 , -5)$
1	$y = 2(1)^2 - 5 = 2 - 5 = -3$	$(1 , -3)$
2	$y = 2(2)^2 - 5 = 8 - 5 = 3$	$(2 , 3)$
−1	$y = 2(-1)^2 - 5 = 2 - 5 = -3$	$(-1 , -3)$
−2	$y = 2(-2)^2 - 5 = 8 - 5 = 3$	$(-2 , 3)$

مثال : مثل المعادلة $y = -x^2$

الحل :



x	$y = -x^2$	(x , y)
0	$y = -(0)^2 = 0$	$(0 , 0)$
1	$y = -(1)^2 = -1$	$(1 , -1)$
2	$y = -(2)^2 = -4$	$(2 , -4)$
−1	$y = -(-1)^2 = -1$	$(-1 , -1)$
−2	$y = -(-2)^2 = -4$	$(-2 , -4)$

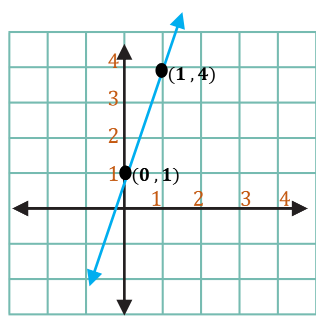
تأكد من فهمك : مثل المعادلات الخطية التالية في المستوي الاحداثي وبين علاقتها بالمحورين :

1) $y = 3x + 1$

الحل :

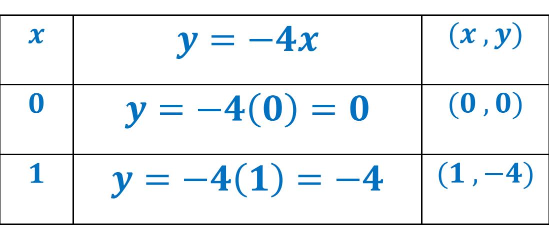
x	$y = 3x + 1$	(x , y)
0	$y = 3(0) + 1 = 1$	$(0 , 1)$
1	$y = 3(1) + 1 = 4$	$(1 , 4)$

المستقيم يقطع المحور الصادي والمحور السيني .



2) $y = -4x$

الحل :



x	$y = -4x$	(x , y)
0	$y = -4(0) = 0$	$(0 , 0)$
1	$y = -4(1) = -4$	$(1 , -4)$

المستقيم يمر بنقطة الاصل .

3) $y + 3x - 2 = 0$ واجب

4) $y = 1 - 3x$ واجب

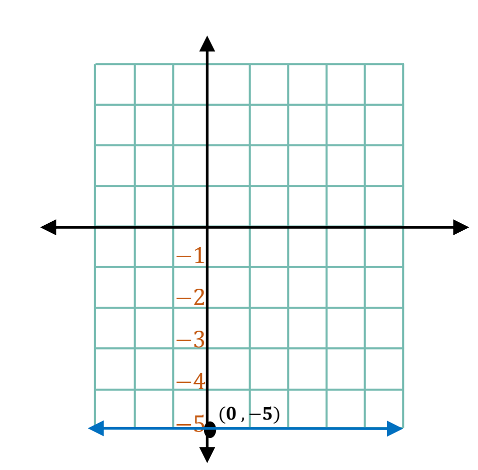
5) $y + 5 = 0$

$y + 5 = 0 \Longrightarrow y = -5$

الحل :

x	$y = -5$	(x , y)
0	$y = -5$	$(0 , 0)$
1	$y = -5$	$(1 , -5)$

المستقيم يوازي المحور السيني وعمودي على المحور الصادي

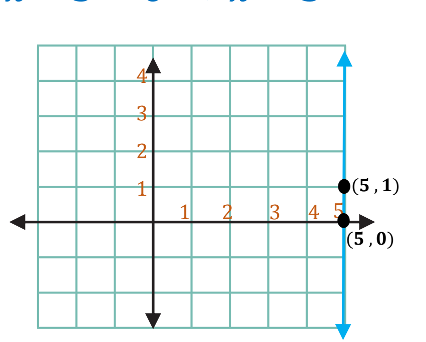


6) $x - 5 = 0$

$x - 5 = 0 \Longrightarrow x = 5$

الحل :

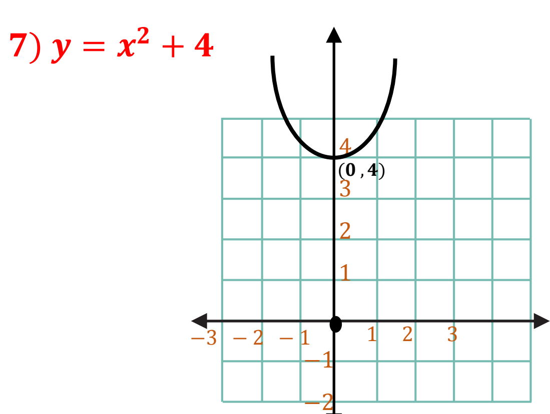
y	$x = 5$	(x, y)
0	$x = 5$	$(5, 0)$
1	$x = 5$	$(5, 1)$



المستقيم يوازي المحور الصادي وعمودي على السيني .

مثل المعادلات التربيعية التالية في المستوي الاحداثي :

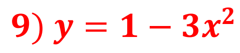
7) $y = x^2 + 4$



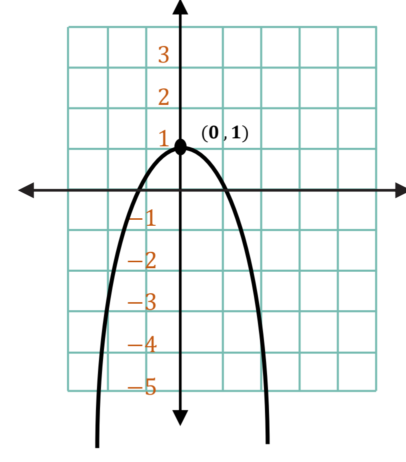
الحل :

x	$y = x^2 + 4$	(x, y)
0	$y = (0)^2 + 4 = 4$	$(0, 4)$
1	$y = (1)^2 + 4 = 5$	$(1, 5)$
2	$y = (2)^2 + 4 = 8$	$(2, 8)$
−1	$y = (-1)^2 + 4 = 5$	$(-1, 5)$
−2	$y = (-2)^2 + 4 = 8$	$(-2, 8)$

8) $y = x^2$ واجب



9) $y = 1 - 3x^2$

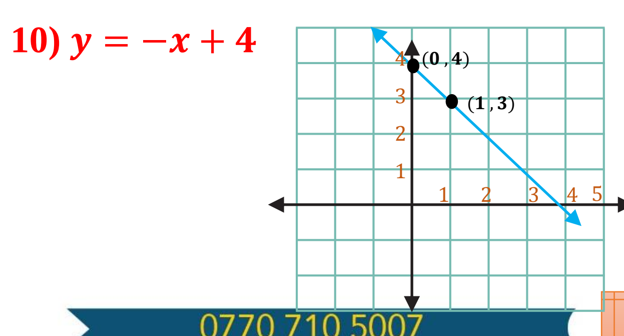


الحل :

x	$y = 1 - 3x^2$	(x, y)
0	$y = 1 - 3(0)^2 = 1$	$(0, 1)$
1	$y = 1 - 3(1)^2 = 1 - 3 = -2$	$(1, -2)$
2	$y = 1 - 3(2)^2 = 1 - 12 = -11$	$(2, -11)$
−1	$y = 1 - 3(-1)^2 = 1 - 3 = -2$	$(-1, -2)$
−2	$y = 1 - 3(-2)^2 = 1 - 12 = -11$	$(-2, -11)$

تدرب وحل التمرينات : مثل المعادلات الخطية التالية في المستوي الاحداثي وبين علاقتها بالمحورين :

10) $y = -x + 4$

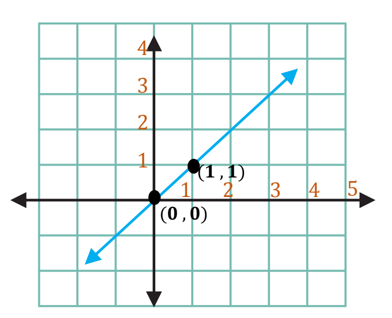


الحل :

x	$y = -x + 4$	(x, y)
0	$y = -(0) + 4 = 4$	$(0, 4)$
1	$y = -(1) + 4 = 3$	$(1, 3)$

المستقيم يقطع المحور الصادي والمحور السيني

$11)\ y = x$



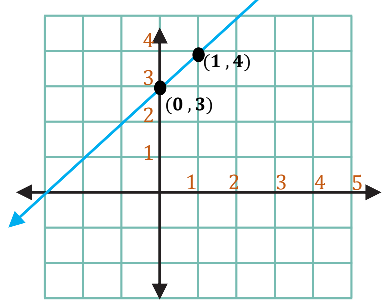
الحل :

x	$y = x$	(x, y)
0	$y = 0$	$(0, 0)$
1	$y = 1$	$(1, 1)$

المستقيم يمر بنقطة الاصل .

$12)\ y + x - 1 = 0$ واجب

$13)\ y - x - 3 = 0$



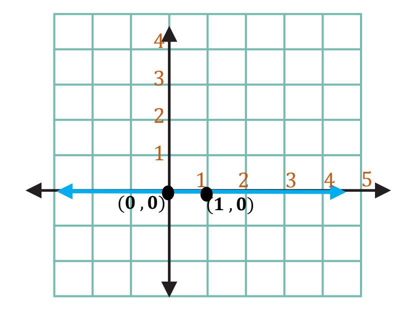
الحل :

x	$y - x - 3 = 0$	(x, y)
0	$y - 0 - 3 = 0$ $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$	$(0, 3)$
1	$y - 1 - 3 = 0$ $y - 4 = 0 \Rightarrow y = 4$	$(1, 4)$

المستقيم يقطع المحور الصادي والمحور السيني .

$14)\ x = \frac{-5}{2}$ واجب

$15)\ y = 0$



الحل :

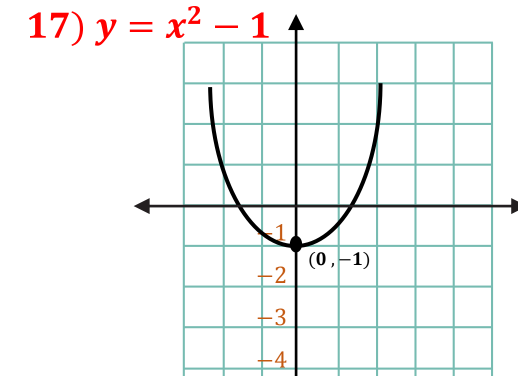
x	$y = 0$	(x, y)
0	$y = 0$	$(0, 0)$
1	$y = 0$	$(1, 0)$

المستقيم يمر بنقطة الاصل وينطبق على المحور السيني .

$16)\ x + y = 0$ واجب

مثل المعادلات التربيعية التالية في المستوي الاحداثي :

$17)\ y = x^2 - 1$



الحل :

x	$y = x^2 - 1$	(x, y)
0	$y = (0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$	$(0, -1)$
1	$y = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$y = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	$(2, 3)$
-1	$y = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$	$(-1, 0)$
-2	$y = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$	$(-2, 3)$

18) $y = 2x^2 + 3$ واجب

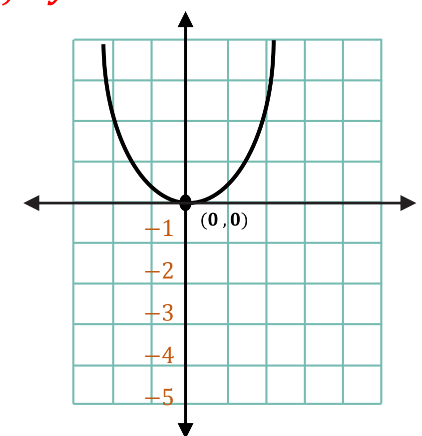
19) $y = -3x^2$

الحل :

x	$y = -3x^2$	(x, y)
0	$y = -3(0)^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$y = -3(1)^2 = -3$	$(1, -3)$
2	$y = -3(2)^2 = -12$	$(2, -12)$
−1	$y = -3(-1)^2 = -3$	$(-1, -3)$
−2	$y = -3(-2)^2 = -12$	$(-2, -12)$

20) $y = 2x^2$ واجب

21) $4y = x^2$



الحل :

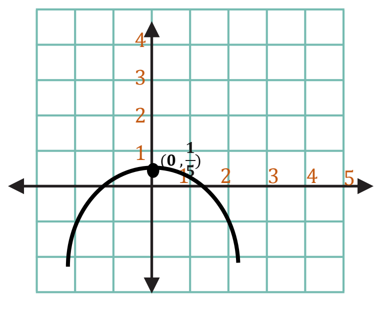
$$4y = x^2 \Longrightarrow \frac{4y}{4} = \frac{x^2}{4} \Longrightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

x	$y = \frac{x^2}{4}$	(x, y)
0	$y = \frac{(0)^2}{4} = \frac{0}{4} = 0$	$(0, 0)$
2	$y = \frac{(2)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$	$(2, 1)$
−2	$y = \frac{(-2)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$	$(-2, 1)$

22) $x^2 + 5y = 1$

الحل :

$$x^2 + 5y = 1 \Longrightarrow 5y = 1 - x^2 \Longrightarrow \frac{5y}{5} = \frac{1-x^2}{5} \Longrightarrow y = \frac{1-x^2}{5}$$



x	$y = \frac{1 - x^2}{5}$	(x, y)
0	$y = \frac{1-(0)^2}{5} = \frac{1}{5}$	$(0, \frac{1}{5})$
1	$y = \frac{1-(1)^2}{5} = \frac{1-1}{5} = \frac{0}{5} = 0$	$(1, 0)$
−1	$y = \frac{1-(-1)^2}{5} = \frac{1-1}{5} = \frac{0}{5} = 0$	$(-1, 0)$

23) $y - 2x^2 = 0$ واجب

تدرب وحل مسائل حياتية :

24) درجات حرارة : المعادلة $F° = \frac{9}{5}C° + 32$ تبين العلاقة بين درجات الحرارة السيليزية ودرجات الحرارة الفهرنهايتية لها، مثل المعادلة بيانيا .

الحل :

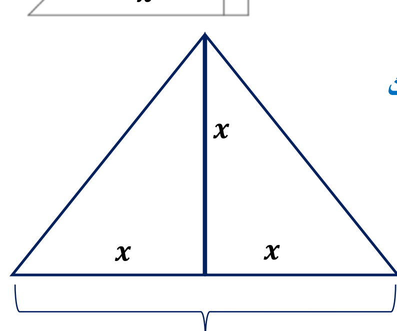
$C°$	$F° = \frac{9}{5}C° + 32$	$(C°, F°)$
0	$F° = \frac{9}{5}(0) + 32 = 32$	$(0, 32)$
1	$F° = \frac{9}{5}(5) + 32$ $F° = 9 + 32 = 41$	$(5, 41)$

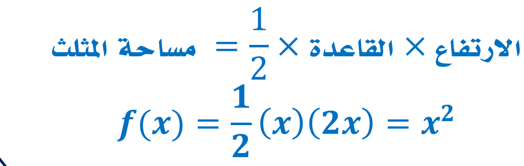
الرسم واجب .

25) هندسة : مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين ، طول ضلعه القائم x وحدة ، $f(x)$ تمثل مساحته i) اكتب العلاقة $f(x)$ بدلالة x .

ii) مثل العلاقة $f(x)$ في المستوي الاحداثي .

الحل :





مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

$$f(x) = \frac{1}{2}(x)(2x) = x^2$$

x	$f(x) = x^2$	(x, y)
0	$y = (0)^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$y = (1)^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$y = (2)^2 = 4$	$(2, 4)$
-1	$y = (-1)^2 = 1$	$(-1, 1)$
-2	$y = (-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$

26) فيزياء : يمثل القانون $F = 9.8\ m$ القوة الناجمة على تأثير جاذبية الارض كتلة الجسم بالكيلوغرام، مثل القانون m ، القوة بالنيوتن F على جسم، حيث بالمستوي الاحداثي .

الحل :

m	$F = 9.8\ m$	(m , F)
0	$F = 9.8(0) = 0$	$(0 , 0)$
1	$F = 9.8\ (1) = 9.8$	$(1 , 9.8)$

الرسم واجب



27) اعمال : تتقاضى شركة معدات بناء 10 الاف دينار كتأمين، يضاف اليها 5 الاف دينار عن كل ساعة ، اكتب المعادلة التي تعبر عن المسألة، ثم مثلها بيانيا في المستوي الاحداثي .



الحل :

x	$y = 10 + 5x$	(x , y)
1	$y = 10 + 5(1) = 15$	$(1 , 15)$
2	$y = 10 + 5(2) = 20$	$(2 , 20)$

الرسم واجب

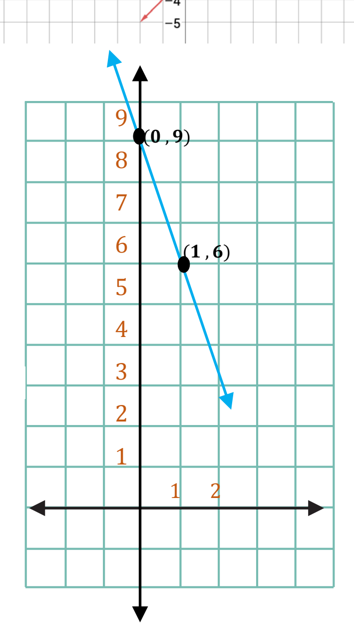


فكر

28) اكتشف الخطأ : مثل محمد المعادلة الخطية التالية $y = -3x + 9$ بالشكل البياني المجاور . اكتشف خطأ محمد وصححه .

الحل :

x	$y = -3x + 9$	(x , y)
0	$y = -3(0) + 9 = 9$	$(0 , 9)$
2	$y = -3(1) + 9 = 6$	$(1 , 6)$



29) مسألة مفتوحة : إعط مثالاً لمعادلة خطية على صورة $ax + by + c = 0$ لكل حالة :

$i)\ a = 0 \qquad ii) b = 0 \qquad iii) c = 0$

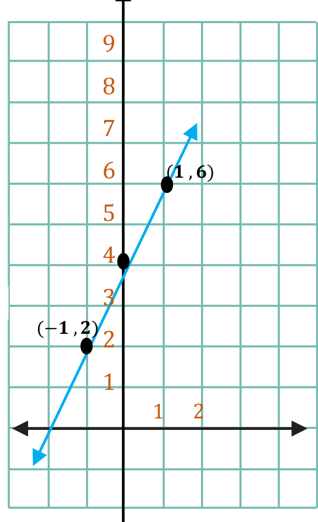
الحل :

$i)\quad a = 0 \quad \Longrightarrow 3y + 6 = 0 \qquad\qquad ii)\ b = 0 \quad \Longrightarrow 4x + 8 = 0$

$iii)\ c = 0 \quad \Longrightarrow 10x + 15y = 0$

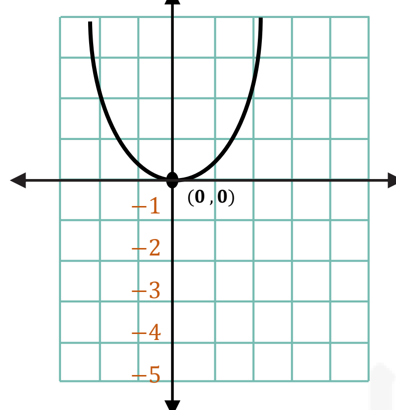
30) تحدٍ: شكلت الازواج المرتبة التالية $(0\,,4),(1\,,6),(-1\,,2)$ مستقيما ، ما نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور السينات ؟

الحل : نقطة التقاطع هي $(-2\,,0)$



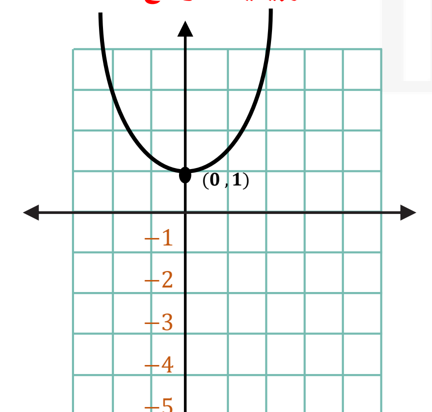
31) تبرير : بين اذا كانت الازواج المرتبة $\{(2\,,4),\ (1\,,1)\,,(0\,,0),(-1\,,1),(-2\,,4)\}$ تمثل دالة خطية أم تربيعية .

الحل : تمثل دالة تربيعية



32) حس عددي : $y = x^2 + 1\,, y = x + 1$ ايهما تمثل دالة تربيعية ؟ وضح ذلك .

الحل : $y = x^2 + 1$ تمثل هي دالة تربيعية



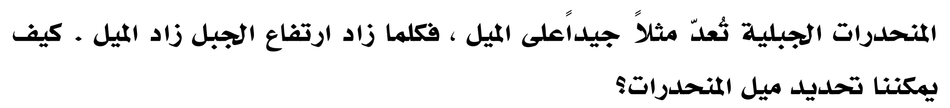
x	$f(x) = x^2 + 1$	$(x\,,y)$
0	$y = (0)^2 + 1 = 1$	$(0\,,1)$
1	$y = (1)^2 + 1 = 2$	$(1\,,2)$
2	$y = (2)^2 + 1 = 5$	$(2\,,5)$
-1	$y = (-1)^2 + 1 = 2$	$(-1\,,2)$
-2	$y = (-2)^2 + 1 = 5$	$(-2\,,5)$

أكتب : خطوات تبين أن $y = 4x + 3$ معادلة خطية ؟

الحل : من خلال تمثيلها بالمستوي الاحداثي حيث تمثل مستقيما .

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

ميل المستقيم



المنحدرات الجبلية تُعدّ مثلاً جيداًعلى الميل ، فكلما زاد ارتفاع الجبل زاد الميل . كيف يمكننا تحديد ميل المنحدرات؟

فكرة الدرس : ايجاد ميل المستقيم .

ايجاد المقطع الصادي .

ايجاد المقطع السيني .

المفردات :

- التغير العمودي
- التغير الافقي
- المقطع السيني
- المقطع الصادي
- الميل

ايجاد ميل المستقيم

الميل : يُعرف ميل المستقيم غير الرأسي بانه النسبة بين التغير العمودي والتغير الافقي .

التغير العمودي : هو التغير الصادي ويساوي $y_2 - y_1$

التغير الافقي : هو التغير السيني ويساوي $x_2 - x_1$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad \text{الميل} = \frac{\text{التغير الصادي}}{\text{التغير السيني}}$$

m : هو ميل المستقيم المار بالنقطتين $(x_1 , y_1), (x_2 , y_2)$

❖ الميل يكون أما موجبا أو سالبا أو صفرا فهو يوازي محور السينات أو غير محدد فهو يوازي محور الصادات .

مثال : جد ميل المستقيم المار بالنقطتين في كل مما يأتي :

$1)\ A\ (5 , 7), B\ (-2 , 1)$

الحل :

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Longrightarrow m = \frac{1-7}{-2-5} = \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$ الميل موجب (المستقيم نحو الاعلى)

$2)\ A\ (-1 , 5), B\ (4 , 2)$

الحل :

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Longrightarrow m = \frac{2-5}{4-(-1)} = \frac{-3}{4+1} = \frac{-3}{5}$ الميل سالب (المستقيم نحو الاسفل)

$3)\ A\ (1\ ,-2), B\ (4\ ,-2)$

الحل :

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Longrightarrow m=\frac{-2-(-2)}{4-1}=\frac{-2+2}{3}=\frac{0}{3}=0$ الميل صفر (المستقيم أفقي) يوازي محور السينات

$4)\ A\ (-2\ ,3), B\ (-2\ ,-3)$

الحل :

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Longrightarrow m=\frac{-3-3}{-2-(-2)}=\frac{-6}{-2+2}=\frac{-6}{0}$ الميل غير محدد (المستقيم عمودي) يوازي محور الصادات

مثال : الجدول المجاور يمثل تغير درجات الحرارة بالزمن (بالساعات) جد ميل المستقيم واشرح ما يعنيه .

الزمن (بالساعات)	درجات الحرارة
1	−2
2	1
3	4
4	10

الحل : نختار اي نقطتين من الجدول ولتكن $(3\ ,4), (1\ ,-2)$.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Longrightarrow m=\frac{-2-4}{1-3}=\frac{-6}{-2}=3$$

اي ان ميل المستقيم 3 فإن درجات الحرارة زادت 3 درجات سليزية كل ساعة .

المقطع السيني : هو قيمة x من تقاطع المستقيم مع محور السينات . ونقطة التقاطع $(x\ ,0)$.

المقطع السيني : هو قيمة y من تقاطع المستقيم مع محور الصادات . ونقطة التقاطع $(0\ ,y)$.

ملاحظة : نجعل المعادلة بالصيغة الاتية : $ax+by=c$

a : معامل x ، b : معامل y ، c : الحد المطلق

المقطع الصادي $y=\frac{c}{b}$ ، المقطع السيني $x=\frac{c}{a}$

مثال : جد المقطع السيني والصادي للمستقيم $3x+5y=15$

الحل :

$x=\frac{c}{a} \Longrightarrow x=\frac{15}{3}=5$ المقطع السيني نقطة التقاطع مع السينات $(5\ ,0)$

$y=\frac{c}{b} \Longrightarrow y=\frac{15}{5}=3$ المقطع الصادي نقطة التقاطع مع الصادات $(0\ ,3)$

مثال : جد المقطع السيني والصادي إن وجد لكل مما يأتي :

$1)\ x=-2$

$x=\frac{c}{a} \Longrightarrow x=\frac{-2}{1}=-2$ المقطع السيني نقطة التقاطع مع السينات $(-2\ ,0)$

لا يوجد مقطع صادي والمستقيم يوازي محور الصادات

$2)\ y=4$

$y=\frac{c}{b} \Longrightarrow y=\frac{4}{1}=4$ المقطع الصادي نقطة التقاطع مع الصادات $(0\ ,4)$

لا يوجد مقطع سيني والمستقيم يوازي محور السينات

تأكد من فهمك : جد ميل المستقيم المار بالنقطتين أموجب الميل أم سالب أم صفرا أم غير محدد ثم حدد إتجاه حركته لكل مما يأتي :

1) $(-2,-2),(-4,1)$

الحل :

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Longrightarrow m=\frac{1-(-2)}{-4-(-2)}=\frac{1+2}{-4+2}=\frac{3}{-2}$ الميل سالب (المستقيم نحو الاسفل)

2) $(0,0),(3,2)$

الحل :

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Longrightarrow m=\frac{2-0}{3-0}=\frac{2}{3}$ الميل موجب (المستقيم نحو الاعلى)

3) $(-4,4),(2,-5)$

الحل :

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Longrightarrow m=\frac{-5-4}{2-(-4)}=\frac{-9}{2+4}=\frac{-9}{6}$ الميل سالب (المستقيم نحو الاسفل)

4) $(5,0),(0,2)$ واجب

الحل :

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Longrightarrow m=\frac{-5-4}{2-(-4)}=\frac{-9}{2+4}=\frac{-9}{6}$ الميل سالب (المستقيم نحو الاسفل)

5) $(4,3),(4,-3)$

الحل :

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Longrightarrow m=\frac{-3-3}{4-4}=\frac{-6}{0}$ غير محدد (المستقيم عمودي)

6) $(-6,-1),(-2,-1)$

الحل :

$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Longrightarrow m=\frac{-1-(-1)}{-2-(-6)}=\frac{-1+1}{-2+6}=\frac{0}{4}=0$ الميل صفر (المستقيم افقي)

جد المقطع السيني والمقطع الصادي لكل مما يأتي :

7) $3x+6y=18$

$x=\frac{c}{a} \Longrightarrow x=\frac{18}{3}=6$ المقطع السيني

$y=\frac{c}{b} \Longrightarrow y=\frac{18}{6}=3$ المقطع الصادي

8) $y+2=5x-4$

$y+2=5x-4 \Longrightarrow -5x+y=-4-2 \Longrightarrow -5x+y=-6$

جعلنا المعادلة بالصيغة الاتية $ax+by=c$

$x=\frac{c}{a} \Longrightarrow x=\frac{-6}{-5}=\frac{6}{5}$ المقطع السيني

$y=\frac{c}{b} \Longrightarrow y=\frac{-6}{1}=-6$ المقطع الصادي

9) $y=-4x$

$y=-4x \Longrightarrow 4x+y=0$ جعلنا المعادلة بالصيغة الاتية $ax+by=c$

$x = \frac{c}{a} \Longrightarrow x = \frac{0}{4} = 0$ المقطع السيني

$y = \frac{c}{b} \Longrightarrow y = \frac{0}{1} = 0$ المقطع الصادي

10) $y = -x + 8$

جعلنا المعادلة بالصيغة الاتية $ax + by = c$ $\quad y = -x + 8 \Longrightarrow x + y = 8$

$x = \frac{c}{a} \Longrightarrow x = \frac{8}{1} = 8$ المقطع السيني

$y = \frac{c}{b} \Longrightarrow y = \frac{8}{1} = 8$ المقطع الصادي

11) $5x = y - 8$ واجب

12) $y = \frac{-3}{4}x - 5$

جعلنا المعادلة بالصيغة الاتية $ax + by = c$ $\quad y = \frac{-3}{4}x - 5 \Longrightarrow \frac{3}{4}x + y = -5$

$x = \frac{c}{a} \Longrightarrow x = \frac{-5}{\frac{3}{4}} = \frac{-20}{3}$ المقطع السيني (مقام المقام يضرب بالبسط)

$y = \frac{c}{b} \Longrightarrow y = \frac{-5}{1} = -5$ المقطع الصادي

13) $2x + 6y = 12$ واجب

14) $y + 4 = 2x - 4$ واجب

15) $y = -5x$

جعلنا المعادلة بالصيغة الاتية $ax + by = c$ $\quad y = -5x \Longrightarrow 5x + y = 0$

$x = \frac{c}{a} \Longrightarrow x = \frac{0}{5} = 0$ المقطع السيني

$y = \frac{c}{b} \Longrightarrow y = \frac{0}{1} = 0$ المقطع الصادي

16) $x = 4$

$x = \frac{c}{a} \Longrightarrow x = \frac{4}{1} = 4$ المقطع السيني ولا يوجد مقطع صادي

17) $3y = -6$

$y = \frac{c}{b} \Longrightarrow y = \frac{-6}{3} = -2$ المقطع الصادي ولا يوجد مقطع سيني

18) $y = -\frac{1}{2}x + 4$ واجب

تدرب وحل التمرينات : جد ميل المستقيم المار بالنقطتين أموجب أم سالب أم صفر أم غير محدد ثم حدد اتجاه حركته لكل مما يأتي :

19) $(4, 4), (2, 3)$

الحل :

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Longrightarrow m = \frac{3-4}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$ الميل موجب (المستقيم نحو الاعلى)

20) $(6, 2), (0, 2)$ واجب

21) $(-2\,,4),(5\,,5)$

الحل :

الميل موجب (المستقيم نحو الاعلى)

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow m=\frac{5-4}{5-(-2)}=\frac{1}{5+2}=\frac{1}{7}$$

22) $(-2\,,-3),(2\,,4)$ واجب

23) $(3\,,-5),(0\,,0)$ واجب

24) $\left(\frac{3}{2}\,,\frac{1}{4}\right),\left(\frac{3}{2}\,,\frac{3}{4}\right)$ واجب

الحل :

الميل غير محدد (المستقيم عمودي)

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow m=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{2}{4}}{0}$$

جد المقطع السيني والمقطع الصادي لكل مما يأتي :

25) $2x+4y=12$

المقطع السيني $x=\frac{c}{a}\Rightarrow x=\frac{12}{2}=6$

المقطع الصادي $y=\frac{c}{b}\Rightarrow y=\frac{12}{4}=3$

26) $3y-7x=9$

المقطع السيني $x=\frac{c}{a}\Rightarrow x=\frac{9}{-7}$

المقطع الصادي $y=\frac{c}{b}\Rightarrow y=\frac{9}{3}=3$

27) $y=-3.5x+2$

جعلنا المعادلة بالصيغة الاتية $ax+by=c$

$$y=-3.5x+2\Rightarrow 3.5x+y=2$$

المقطع السيني $x=\frac{c}{a}\Rightarrow x=\frac{2}{3.5}=\frac{2}{\frac{35}{10}}=\frac{20}{35}$

المقطع الصادي $y=\frac{c}{b}\Rightarrow y=\frac{2}{1}=2$

28) $y=-\frac{3}{2}x$

جعلنا المعادلة بالصيغة الاتية $ax+by=c$

$$y=-\frac{3}{2}x\Rightarrow \frac{3}{2}x+y=0$$

المقطع السيني $x=\frac{c}{a}\Rightarrow x=\frac{0}{\frac{3}{2}}=0$

المقطع الصادي $y=\frac{c}{b}\Rightarrow y=\frac{0}{1}=0$

29) $x=-4$ واجب

30) $0=y+3$

جعلنا المعادلة بالصيغة الاتية $ax+by=c$

$$y+3=0\Rightarrow y=-3$$

المقطع الصادي ولا يوجد مقطع سيني $y=\frac{c}{b}\Rightarrow y=\frac{-3}{1}=-3$

تدرب وحل مسائل حياتية :

31) فيزياء : يمثل الجدول المجاور كمية السائل المتدفق من حوض خلال فترة زمنية، جد ميل المستقيم الذي يمثله الجدول . وفسر مايعنيه .

كمية السائل المتسرب	
حجم السائل m^3	الزمن (ثواني)
40	10
52	13
64	16
76	19

الحل :

نختار اي نقطتين من الجدول ولتكن $(40,10)$, $(64,16)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m=\frac{16-10}{64-40}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

ميل المستقيم تساوي $\frac{1}{4}$ فإن كمية الماء المتدفق من الحوض هو $\frac{1}{4}$ متر لكل ثانية .

32) نبات :اذا كان طول نبتة $30\ cm$ ، في غضون كل شهرين تنمو بمقدار ثابت $4\ cm$ اخرى .

4	2	0	الزمن
			طول النبتة

i) أكمل الجدول .

ii) ما ميل المستقيم الذي تمثله العلاقة بين طول النبتة والزمن ؟

iii) اكتب الدالة الخطية التي يمثلها الجدول .

iv) مثل الدالة في المستوي الاحداثي .

الحل :

i)

4	2	0	الزمن
34	30	26	طول النبتة

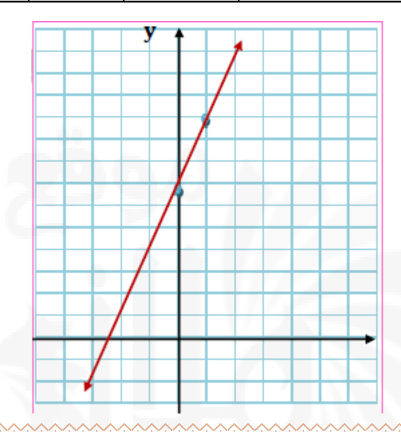
ii)

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m=\frac{34-26}{4-0}=\frac{8}{4}=2$$

iii) $y=2x+26$

iv)

x	$y=2x+26$	(x,y)
0	$y=2(0)+26=26$	$(0,26)$
1	$y=2(1)+26=28$	$(0,28)$



فكر

33) تحدٍ : جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-5,a)$, $(1,6)$ يساوي $\frac{1}{2}$.

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{a-6}{-5-1} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{a-6}{-6}$$

$$2a-12=-6 \Rightarrow 2a=-6+12 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow \frac{2a}{2}=\frac{6}{2} \Rightarrow a=3$$

34) تفكير ناقد : هل يمكنك تحديد ميل مستقيم يمر بالنقطتين $(7,3),(7,-3)$.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m=\frac{3-(-3)}{7-7} \Rightarrow m=\frac{3+3}{0}=\frac{6}{0}$$ الميل غير محدد

35) أكتشف الخطأ : ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,-1),(0,3)$ هو $\frac{3}{4}=\frac{3-0}{3-(-1)}=m$ أكتشف الخطأ وصححه .

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m=\frac{-1-3}{3-0}=\frac{-4}{3}$$

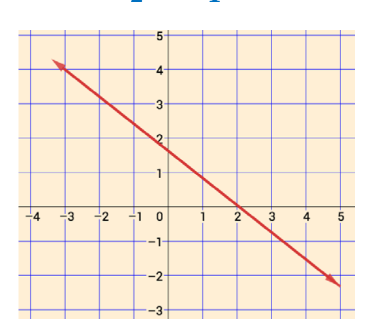
36) مسألة مفتوحة : إذكر نقطتين على مستقيم يكون ميله $=\frac{-1}{3}$

$(-2,4)(1,3)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m=\frac{3-4}{1-(-2)}=\frac{-1}{3}$$

37) تفكير ناقد : من الشكل البياني المجاور حدد اتجاه المستقيم

المستقيم نحو الاسفل عند التحرك من اليسار الى اليمين وقيم y تتناقص



أكتب : باسلوبك ماذا يعني الميل يساوي صفرا ، والميل غير محدد .

الميل يساوي صفر يعني المستقيم افقي ويوازي محور السينات وقيم y ثابتة .

الميل غير محدد يعني المستقيم عمودي (شاقولي) ويوازي محور الصادات وقيم x ثابتة .



معادلة المستقيم

تعلم : يقطع راكب دراجة هوائية 20 كيلو متراً في ساعتين و يقطع 50 كيلو متراً في خمس ساعات ، ما المعادلة الخطية التي تربط بين المسافة و الزمن ؟



فكرة الدرس : ايجاد معادلة مستقيم علم منه :

❖ نقطتان ❖ ميل ونقطة ❖ ميل ومقطع

المفردات : ❖ الميل ❖ المقطع

كتابة معادلة مستقيم بمعرفة نقطتين

نستطيع ايجاد معادلة مستقيم إذا علمت نقطتين وتكون المعادلة بالشكل الاتي :

$$\boxed{\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

مثال : يقطع راكب دراجة هوائية 20 كيلو متراً في ساعتين و يقطع 50 كيلو متراً في خمس ساعات ، ما المعادلة الخطية التي تربط بين المسافة و الزمن ؟

الحل :

$$A\,(2\,,20)\quad,B\,(5\,,50)$$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-20}{x-2}=\frac{50-20}{5-2}\Rightarrow\frac{y-20}{x-2}=\frac{30}{3}$$

$$30x-60=3y-60\Rightarrow 30x-3y=-60+60$$

$$[30x-3y=0]\div 3\Rightarrow\frac{30x}{3}-\frac{3y}{3}=0\Rightarrow 10x-y=0$$

كتابة معادلة المستقيم بمعرفة ميله ونقطة منه

$$\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$$

مثال : استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها :

$i)\ y-3=-5\,(x-2)$

الحل :

$$y-\underset{\Downarrow}{3}=\underset{\Downarrow}{-5}\left(x-\underset{\Downarrow}{2}\right)$$

$y-y_1=\ m\ \ (x-x_1)$ نقارن بمعادلة الميل والنقطة

$m=\ -5\quad,\quad(x_1\,,y_1)=(2\,,3)$

$ii)\ y+7=\frac{2}{5}x$

الحل : نكتب المعادلة بالصيغة الاتية :

$$y+\underset{\Downarrow}{7}=\underset{\Downarrow}{\frac{2}{5}}\left(x-\underset{\Downarrow}{0}\right)$$

$y-y_1=\ m\ \ (x-x_1)$ نقارن بمعادلة الميل والنقطة

$m=\frac{2}{5}\quad,\quad(x_1\,,y_1)=(0\,,-7)$

مثال : جد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{2}$ ومقطعه السيني يساوي -1 .

الحل : لدينا ميل المستقيم فنحتاج الى نقطة ، فالنقطة نستخرجها من مقطعه السيني وهي $(-1,0)$

$$y-y_1=\ m\ \ (x-x_1)$$

$$y-0=\frac{1}{2}(x-(-1))\Rightarrow y=\frac{1}{2}(x+1)\Rightarrow 2y=x+1\Rightarrow 2y-x=1$$

كتابة معادلة المستقيم بمعرفة ميله ومقطعه مع أحد المحورين :

معادلة المستقيم بدلالة ميله m ومقطعه الصادي k وهي : $\boxed{y=mx+k}$

m : الميل $\qquad$ k : مقطعه الصادي

مثال : استعمل معادلة الميل والمقطع لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه :

$i)\ 2x+3y=6$ $\quad ii)\ 5x=7y+8$ $\quad iii)\ y=x$ $\quad iv)\ y=1$

$v)\ y=0$ $\quad vi)\ y+x=5$

الحل :

$i)\ 2x+3y=6 \Rightarrow 3y=-2x+6$ (نقسم المعادلة على 3)

$$\frac{3y}{3}=\frac{-2}{3}x+\frac{6}{3} \Rightarrow y=\underbrace{\frac{-2}{3}}_{\Downarrow}x+\underbrace{2}_{\Downarrow}$$

$$y=m\,x+k$$

$\therefore\ m=\frac{-2}{3} \quad , \quad k=2$

$ii)\ 5x=7y+8 \Rightarrow 7y=5x-8$ (نقسم المعادلة على 7)

$$\frac{7y}{7}=\frac{5}{7}x-\frac{8}{7} \Rightarrow y=\underbrace{\frac{5}{7}}_{\Downarrow}x-\underbrace{\frac{8}{7}}_{\Downarrow}$$

$$y=m\,x+k$$

$\therefore\ m=\frac{5}{7} \quad , \quad k=\frac{-8}{7}$

$iii)\ y=x \Rightarrow y=\underbrace{1}_{\Downarrow}\,x+\underbrace{0}_{\Downarrow}$

$$y=m\,x+k$$

$\therefore\ m=1 \quad , \quad k=0$

$iv)\ y=1 \Rightarrow y=\underset{\Downarrow}{0}\,x+\underbrace{1}_{\Downarrow}$

$$y=m\,x+k$$

$\therefore\ m=0 \quad , \quad k=1$

$v)\ y=0 \Rightarrow y=\underset{\Downarrow}{0}\,x+\underbrace{0}_{\Downarrow}$

$$y=m\,x+k$$

$\therefore\ m=0 \quad , \quad k=0$

$vi)\ y+x=5 \Rightarrow y=\underbrace{-1}_{\Downarrow}\,x+\underbrace{5}_{\Downarrow}$

$$y=\ m\,x+k$$

$\therefore\ m=-1 \quad , \quad k=5$

مثال : مستقيم يمر في النقطة $(5\,,-1)$ وميله $\frac{-2}{5}$. جد مقطعه ومعادلته .

الحل :

$y-y_1=\ m\ \ (x-x_1)$

$y-(-1)=\frac{-2}{5}(x-5) \Rightarrow y+1=\frac{-2}{5}(x-5) \Rightarrow 5y+5=-2x+10$

$5y=-2x+10-5$

$5y=-2x+5 \ \Rightarrow \frac{5y}{5}=\frac{-2x}{5}+\frac{5}{5} \Rightarrow y=\frac{-2}{5}x+1$ معادلة المستقيم

تأكد من فهمك : جد معادلة المستقيمات التي يمر كل منها بنقطتين فيما يأتي :

1) $(-3,1),(2,-1)$

الحل :

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-1}{x-(-3)}=\frac{-1-1}{2-(-3)}\Rightarrow\frac{y-1}{x+3}=\frac{-2}{2+3}\Rightarrow\frac{y-1}{x+3}=\frac{-2}{5}$$

نضرب طرفين في وسطين

$$5y-5=-2x-6\Rightarrow 5y=-2x-6+5\Rightarrow 5y=-2x-1\Rightarrow\frac{5y}{5}=\frac{-2x}{5}-\frac{1}{5}$$

$y=\frac{-2}{5}x-\frac{1}{5}$ معادلة المستقيم

2) $(0,2),(2,-4)$ واجب

إستعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها :

3) $y-1=2(x-3)$

الحل :

$$y-1=2\quad(x-3)$$
$$y-y_1=m\quad(x-x_1)$$
$$m=2\ ,(x_1,y_1)=(3,1)$$

4) $y+1=-x+4$

الحل :

$$y-(-1)=-1\ (x-4)$$
$$y-\ y_1=m\ (x-x_1)$$
$$m=-1\ ,(x_1,y_1)=(4,-1)$$

جد معادلة المستقيم لكل مما يلي ثم جد مقطعه :

5) $(4,6),\frac{-2}{5}$

$$y-y_1=m\ (x-x_1)$$
$$y-6=\frac{-2}{5}(x-4)\Rightarrow 5y-30=-2x+8\Rightarrow 5y=-2x+8+30$$
$$5y=-2x+38\Rightarrow\frac{5y}{5}=\frac{-2x}{5}+\frac{38}{5}\Rightarrow y=\frac{-2}{5}x+\frac{38}{5}$$

$k=\frac{38}{5}$ مقطعه الصادي

6) $(-1,-3)\ ,\ \frac{1}{3}$ واجب

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه :

7) $5y=-2x-1$

$$5y=-2x-1\Rightarrow\frac{5y}{5}=\frac{-2x}{5}-\frac{1}{5}\Rightarrow y=\frac{-2}{5}x-\frac{1}{5}$$

$$y=m\,x+\ k\qquad\therefore\ m=\frac{-2}{5}\quad,\quad k=\frac{-1}{5}$$

8) $-y = 7x$

$$-y = 7x \overset{\times -1}{\Longrightarrow} y = -7x \Rightarrow y = \underbrace{-7}_{\Downarrow} x + \underbrace{0}_{\Downarrow}$$

$$y = m\,x + k \qquad \therefore \; m = -7 \quad , \quad k = 0$$

تدرب وحل التمرينات : جد معادلة المستقيمات التي يمر كل منها بنقطتين فيما يأتي :

9) $(0,0),(-3,7)$ واجب

10) $(0,7),(-5,0)$ واجب

11) $\left(\frac{1}{2},3\right),\left(\frac{3}{2},-1\right)$

الحل :

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y-3}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-1-3}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{y-3}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-4}{\frac{2}{2}} \Rightarrow \frac{y-3}{x-\frac{1}{2}} = \frac{-4}{1}$$

نضرب طرفين في وسطين

$$y-3 = -4x-(-4)\frac{1}{2} \Rightarrow y-3 = -4x+2 \Rightarrow y = -4x+2+3 \Rightarrow y = -4x+5$$

$y = -4x+5$ معادلة المستقيم

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها :

12) $y + \frac{3}{2} = -5(x-8)$

$$y - (-\tfrac{3}{2}) = -5(x-8)$$

$$y - y_1 = m\,(x-x_1)$$

$$m = -5 \quad , \quad (x_1,y_1) = \left(8,-\frac{3}{2}\right)$$

13) $y - x = 8$ واجب

14) $\frac{3}{5}y = \frac{5}{2}(x+2)$

$$[\tfrac{3}{5}y = \tfrac{5}{2}(x+2)] \qquad \text{نضرب بـ } \tfrac{5}{3}$$

$$\frac{3}{5}\left(\frac{5}{3}\right)y = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{3}\right)(x+2) \Rightarrow y = \frac{25}{6}(x+2)$$

$$y - 0 = \frac{25}{6}(x-(-2))$$

$$y - y_1 = m\,(x-x_1)$$

$$m = \frac{25}{6} \quad ,(x_1,y_1) = (-2,0)$$

جد معادلة المستقيم لكل مما يلي ثم جد مقطعه :

15) $(-3,7)$, $-3 =$ الميل

$$y - y_1 = m\,(x-x_1)$$

$y-7=-3\,(x-(-3)) \Rightarrow y-7=-3(x+3) \Rightarrow y-7=-3x-9$

$y=-3x-9+7 \Rightarrow y=-3x-2$ معادلة المستقيم

15) $(-3\,,7)$, $-3=$ الميل   واجب

إستعمل معادلة الميل والمقطع لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه :

17) $y+7=3x+5$

$y=3x+5-7 \Rightarrow y=\underbrace{3}_{\Downarrow}x\underbrace{-2}_{\Downarrow}$

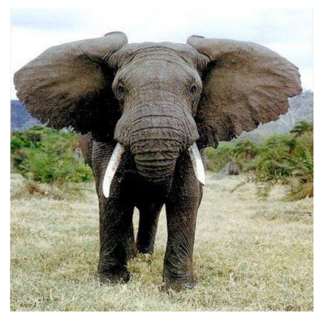
$y=\ m\,x+\ k \qquad \therefore\ m=3 \quad , \quad k=-2$

18) $\frac{1}{3}y=-5x-1$

$\frac{1}{3}y=-5x-1 \overset{\times 3}{\Rightarrow} \frac{3}{3}y=-15x-3 \Rightarrow y=\underbrace{-15}_{\Downarrow}x\underbrace{-3}_{\Downarrow}$

$y=\ m\,x+\ k \qquad \therefore\ m=-15 \quad , \quad k=-3$

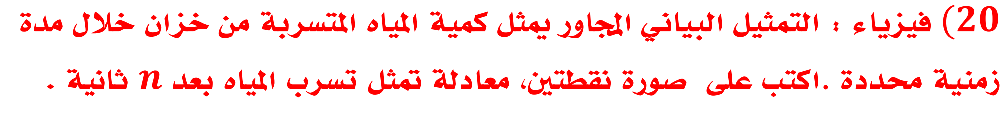
تدرب وحل مسائل حياتية :



19) أحياء : ينمو ناب الفيل طول حياته بمعدل $1\ cm$ لكل شهر . افرض أنك بدأت بمراقبه فيل عندما كان طول نابه $100\ cm$. اكتب على صورة الميل – النقطة معادلة تمثل نمو ناب الفيل بعد n شهر من المراقبة.

الحل : $(1\,,100)$ ، $m=n$

$y-y_1=m\ (x-x_1) \Rightarrow y-100=n\,(x-1)$



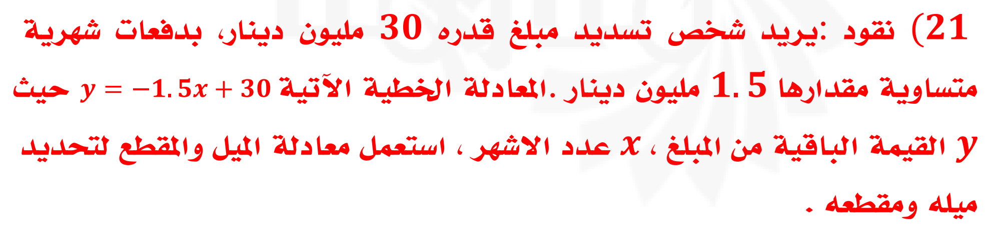
20) فيزياء : التمثيل البياني المجاور يمثل كمية المياه المتسربة من خزان خلال مدة زمنية محددة .اكتب على صورة نقطتين، معادلة تمثل تسرب المياه بعد n ثانية .

الحل : $(5\,,10),(15\,,30)$ من الشكل البياني

$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y-10}{x-5}=\frac{30-10}{15-5} \Rightarrow \frac{y-10}{x-5}=\frac{20}{10}$

$\frac{y-10}{x-5}=\frac{2}{1} \Rightarrow y-10=2x-10 \Rightarrow y=2x-10+10$

$y=2x \Rightarrow y-2x=0$ معادلة تمثل تسرب المياه





21) نقود :يريد شخص تسديد مبلغ قدره 30 مليون دينار، بدفعات شهرية متساوية مقدارها 1.5 مليون دينار.المعادلة الخطية الآتية $y=-1.5x+30$ حيث y القيمة الباقية من المبلغ ، x عدد الاشهر ، استعمل معادلة الميل والمقطع لتحديد ميله ومقطعه .

الحل :

$y=\underbrace{-1.5}_{\Downarrow}x+\underbrace{30}_{\Downarrow}$

$y=\ m\,x\ +\ k \qquad \therefore\ m=-1.5 \quad , \quad k=30$





22) صحة : في دراسة حديثة توصلت الى ان الشخص يفقد 2 ساعة من عمره عند استهلاكه علبة سكائر واحدة . اكتب المعادلة التي تمثل ذلك ، ومثلها بيانيا .

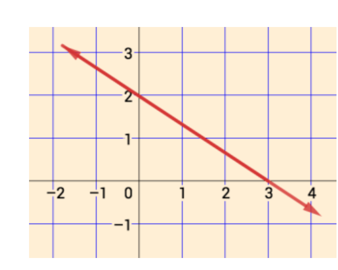
الحل : نأخذ نقطتين من الجدول $(2,4)$, $(1,2)$

الزمن (ساعة)	2	4	6
الاستهلاك	1	2	3

$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ الحل المتبقي واجب

23) هندسة :استعمل المعلومات في الشكل المجاور وجد معادلة المستقيم في لحالات الآتية :

(i) نقطتان (ii) ميل - نقطة (iii) ميل - مقطعه الصادي



الحل : $(0,2)$, $(3,0)$

$$i)\ \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-0}{x-3}=\frac{2-0}{0-3}\Rightarrow\frac{y}{x-3}=\frac{2}{-3}$$

$$[-3y=2x-6]\div-3\Rightarrow\frac{-3y}{-3}=\frac{2x}{-3}-\frac{6}{-3}\Rightarrow y=\frac{-2}{3}x+2$$

$$ii)\ m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow m=\frac{2-0}{0-3}=\frac{2}{-3}$$ النقطة $(3,0)$

$$y-0=\frac{2}{-3}(x-3)\Rightarrow y=\frac{2}{-3}(x-3)\Rightarrow-3y=2x-6\Rightarrow y=\frac{-2}{3}x+2$$

$iii)$ ميل – مقطعه الصادي واجب

فكر

24) تفكير ناقد :هل يوجد مستقيم ميله 4 ويمر في النقطتين $(8,-2)(5,7)$ ؟ إن وجدت مستقيما كهذا فاكتب معادلته وإلا فعلل جوابك .

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow m=\frac{-2-7}{8-5}=\frac{-9}{3}=-3$$

لا يوجد مستقيم ميله 4 يمر بالنقطتين .

25) تحدٍّ : مستقيم تقاطعه الأفقي النظير الجمعي لتقاطعه العمودي ، ويمر في النقطة $(2,3)$. اكتب معادلة الميل - النقطة لهذا المستقيم .

الحل : $(0,0)$, $(2,3)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow m=\frac{0-3}{0-2}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

$$y-y_1=m\ (x-x_1)\Rightarrow y-3=\frac{3}{2}(x-2)\Rightarrow 2y-6=3x-6$$

$$2y-3x=-6+6\Rightarrow 2y-3x=0$$ معادلة المستقيم

26) ايهما صحيح :معادلة مستقيم ميله $\frac{3}{5}$ ويمر بالنقطة $(-1,7)$.

كتب احمد المعادلة بشكل $y-7=\frac{5}{3}(x+1)$

كتب محمد المعادلة بشكل $y-7=\frac{3}{5}(x+1)$ أيهما اجابته صحيحة ؟

الحل :

$$y-y_1=m\ (x-x_1)\Rightarrow y-7=\frac{3}{5}\ (x-(-1))\Rightarrow y-7=\frac{3}{5}\ (x+1)$$

إجابة محمد صحيحة .

أكتب : مسألة من واقع الحياة يمكن تمثيلها بمعادلة الخط المستقيم .

الحل : أشترى محمد أجهزة كهربائية بالتقسيط حيث دفع 750 ألف دينار دفعة أولى ويدفع 100 ألف دينار كل شهر ، أكتب معادلة المبلغ الكلي الذي سيدفعه بعد x شهرا . إستعمل معادلة الميل والمقطع لتحديد ميله ومقطعه .

$$y=100x+750$$

$$y=\ m\,x\ +\ k \qquad \therefore\ m=100 \quad ,\quad k=750$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

المستقيمات المتوازية والمتعامدة

فكرة الدرس : التمييز بين المستقيمات المتوازية .

التمييز بين المستقيمات المتعامدة .

المفردات :

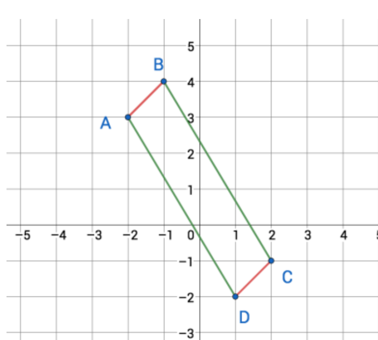
- المستقيمات المتوازية
- المستقيمات المتعامدة

أولاً : المستقيمات المتوازية : وهما يقعان في مستوي واحد وليس بينهما نقطة مشتركة .

وبذلك يكون $m_1=m_2 \Leftrightarrow \overleftrightarrow{L_1}//\overleftrightarrow{L_2}$

مثال : بين ان النقط $A(-2\,,3), B(-1\,,4), C\,(2\,,-1)\,, D(1\,,-2)$ رؤوس متوازي اضلاع باستعمال الميول .

الحل : نجد الميل بين كل نقطتين اي بين $AB\ ,\ CD$ و $AD\ , BC$ حسب الرسم المجاور



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$A(-2\,,3)$ ، $B(-1\,,4)$ ، $C(2\,,-1)$ ، $D(1\,,-2)$

$$m_{AB}=\frac{4-3}{-1-(-2)}=\frac{1}{-1+2}=\frac{1}{1}=1$$

$$m_{CD}=\frac{-2-(-1)}{1-2}=\frac{-2+1}{-1}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$m_{AB}=m_{CD} \quad \therefore \overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{CD}$$

$B(-1\,,4)$ ، $C(2\,,-1)$ ، $A(-2\,,3)$ ، $D(1\,,-2)$

$$m_{BC}=\frac{-1-4}{2-(-1)}=\frac{-5}{2+1}=\frac{-5}{3}$$

$$m_{AD}=\frac{-2-3}{1-(-2)}=\frac{-5}{1+2}=\frac{-5}{3}$$

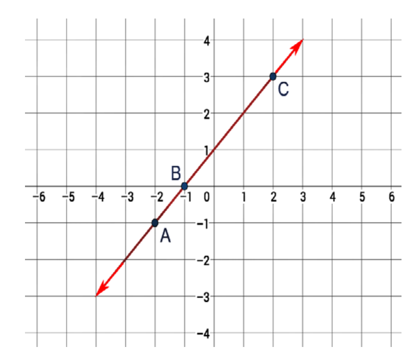


$m_{BC} = m_{AD} \quad \therefore \overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{AD}$

∴ الشكل $ABCD$ متوازي اضلاع لأن في متوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين متوازيين

مثال : اثبت أن النقاط $A(-2\,,-1), B(-1\,,0), C\,(2\,,3)$ تقع على استقامة واحدة باستعمال الميول .

الحل :



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$A(-2\,,-1)$, $B(-1\,,0)$

$$m_{AB} = \frac{0-(-1)}{-1-(-2)} = \frac{1}{-1+2} = \frac{1}{1} = 1$$

$B(-1\,,0)$, $C(2\,,3)$

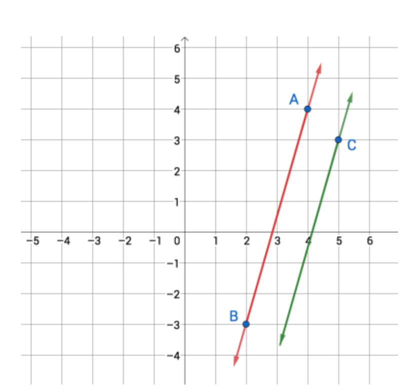
$$m_{BC} = \frac{3-0}{2-(-1)} = \frac{3}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$m_{AB} = m_{BC}$$

∴ النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة (اي تمثل خط مستقيم)

مثال : جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $C\,(5\,,3)$ والموازي للمستقيم المار بالنقطتين $A(4\,,5), B(2\,,-3)$.

الحل : نجد ميل المستقيم المار بالنقطتين A , B



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$A(4\,,5)$, $B(2\,,-3)$

$$m_{AB} = \frac{-3-5}{2-4} = \frac{-8}{-2} = 4$$

∵ المستقيمان متوازيان ∴ ميل المستقيم المطلوب $= 4$ اي هو نفس ميل AB

نكتب الان معادلة المستقيم والنقطة لايجاد معادلة المستقيم

$$m = 4 \quad , \quad C(5\,,3)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 4(x-5) \Rightarrow y - 3 = 4x - 20 \Rightarrow y = 4x - 20 + 3 \Rightarrow y = 4x - 17$$

مثال : ليكن $\overleftrightarrow{L_1} : y = \frac{-5}{3}x + 4 \ , \ \overleftrightarrow{L_2} : y = \frac{5}{3}x + 4 \ , \ \overleftrightarrow{L_3} : y = \frac{-5}{3}x - 4$ اي المستقيمات متوازية ولماذا؟

الحل :

$$\overleftrightarrow{L_1} : y = \frac{-5}{3}x + 4 \Rightarrow m_1 = \frac{-5}{3} \quad , \quad k_1 = 4$$

$$\overleftrightarrow{L_2} : y = \frac{5}{3}x + 4 \Rightarrow m_2 = \frac{5}{3} \quad , \quad k_2 = 4$$

$$\overleftrightarrow{L_3} : y = \frac{-5}{3}x - 4 \Rightarrow m_3 = \frac{-5}{3} \quad , \quad k_3 = 4$$

$$\therefore m_1 = m_3 \Rightarrow \overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_3} \quad , \quad k_1 \neq k_3$$

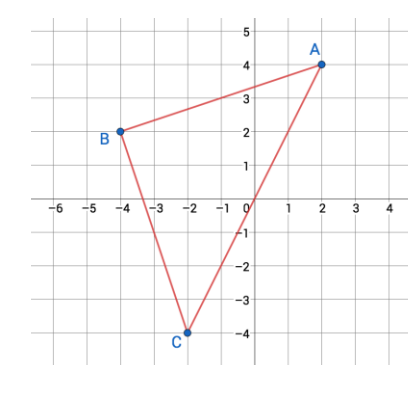
ثانيا : المستقيمات المتعامدة : إن المستقيمان المتعامدان يلتقيان في نقطة واحدة ويصنعان زاوية قائمة ويقعان في مستوٍ واحد .

(المستقيمان المتعامدان حاصل ضربهما $= -1$)

$$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 = \frac{-1}{m_2} \quad \text{أو} \quad m_1 \times m_2 = -1$$

مثال : بين أن النقط $A(2,4), B(-4,2), C(-2,-4)$ رؤوس لمثلث قائم الزاوية . حدد الزاوية القائمة فيه.

الحل :



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$A(2,4)$, $B(-4,2)$

$$m_{AB}=\frac{2-4}{-4-2}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$$

$B(-4,2)$, $C(-2,-4)$

$$m_{BC}=\frac{-4-2}{-2-(-4)}=\frac{-6}{-2+4}=\frac{-6}{2}=-3$$

$A(2,4)$, $C(-2,-4)$

$$m_{AC}=\frac{-4-4}{-2-2}=\frac{-8}{-4}=2$$

$$\therefore m_{AB}\times m_{BC}=\frac{1}{3}\times -3=-1$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AB}\perp\overleftrightarrow{BC} \quad , \quad m\angle B=90^\circ$$

مثال : جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $C(3,-4)$ والعمودي على المستقيم المار بالنقطتين $A(0,3), B(2,-2)$

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$A(0,3)$, $B(2,-2)$

$$m_{AB}=\frac{-2-3}{2-0}=\frac{-5}{2}$$

$\because$ المستقيمان متعامدان $\therefore$ ميل المستقيم الثاني $=\frac{2}{5}$ اي هو (مقلوب ميل المستقيم AB عكس الاشارة)

نكتب الان معادلة المستقيم والنقطة لايجاد معادلة المستقيم

$$m=\frac{2}{5} \quad , \quad C(3,-4)$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-(-4)=\frac{2}{5}(x-3)\Rightarrow y+4=\frac{2}{5}(x-3)\Rightarrow 5y+20=2x-6$$

$$5y=2x-6-20\Rightarrow 5y=2x-26\Rightarrow \frac{5y}{5}=\frac{2x}{5}-\frac{26}{5}\Rightarrow \boxed{y=\frac{2}{5}x-\frac{26}{5}}$$

مثال : جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(a,-4),(3,1)$ عمودي على المستقيم الذي ميله $\frac{-1}{5}$.

الحل : بما أن المستقيمين متعامدان اذن ميل المستقيم المطلوب $=5$

(وهو مقلوب ميل المستقيم الذي ميله $=\frac{-1}{5}$ عكس الاشارة)

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$(3,1)$, $(a,-4)$

$$5=\frac{-4-1}{a-3}$$

$$\frac{5}{1}=\frac{-5}{a-3}\Rightarrow 5a-15=-5\Rightarrow 5a=-5+15\Rightarrow 5a=10\Rightarrow \frac{5a}{5}=\frac{10}{5}\Rightarrow a=2$$

تأكد من فهمك

1) المستقيم AB يمر بالنقطتين $A(-2,4), B(a,6)$ عمودي على المستقيم CD الذي يمر بالنقطتين $C(6,-6), D(2,-7)$ جد قيمة a .

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{CD} = \frac{-7-(-6)}{2-6} = \frac{-7+6}{-4} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$C(6,-6)$

$D(2,-7)$

$\therefore$ ميل المستقيم AB هو -4 اي مقلوب ميل CD عكس الاشارة لأنه عمودي عليه أي $m_{AB} = m_{CD} = -4$

$$m_{AB} = \frac{6-4}{a-(-2)}$$

$A(-2,4)$

$B(a,6)$

$$-4 = \frac{2}{a+2} \Rightarrow \frac{-4}{1} = \frac{2}{a+2} \Rightarrow -4a - 8 = 2 \Rightarrow -4a = 2+8 \Rightarrow -4a = 10$$

$$\frac{-4a}{-4} = \frac{10}{-4} \Rightarrow a = \frac{-5}{2}$$

2) جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(6,a), (3,2)$ يساوي $\frac{-1}{4}$.

الحل : $(3,2)$

$(6,a)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{-1}{4} = \frac{a-2}{6-3} \Rightarrow \frac{-1}{4} = \frac{a-2}{3}$$

$$4a - 8 = -3 \Rightarrow 4a = -3+8 \Rightarrow 4a = 5 \Rightarrow \frac{4a}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

3) برهن أن الشكل $ABCD$ متوازي اضلاع حيث $A(3,0), B(0,4), C(-3,0), D(0,-4)$.

الحل : نجد الميل بين كل نقطتين اي بين AD, BC و CD , AB

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{4-0}{0-3} = \frac{4}{-3}$$

$A(3,0)$

$B(0,4)$

$$m_{CD} = \frac{-4-0}{0-(-3)} = \frac{-4}{3}$$

$C(-3,0)$

$D(0,-4)$

$m_{AB} = m_{CD} \quad \therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

$$m_{BC} = \frac{0-4}{-3-0} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$B(0,4)$

$C(-3,0)$



$$m_{AD}=\frac{-4-0}{0-3}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

$A(3\,,0)$

$D(0\,,-4)$

$m_{BC}=m_{AD}\quad \therefore \overleftrightarrow{BC}//\overleftrightarrow{AD}$

∴ الشكل $ABCD$ متوازي اضلاع لأن في متوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين متوازيين

4) برهن أن $\Delta\ ABC$ حيث : $A(-5\,,-7), B(-8\,,-2), C\,(-4\,,-3)$ قائم الزاوية ، ثم حدد الزاوية القائمة .

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m_{AB}=\frac{-2-(-7)}{-8-(-5)}=\frac{-2+7}{-8+5}=\frac{5}{-3}$$

$A(-5\,,-7)$

$B(-8\,,-2)$

$$m_{BC}=\frac{-3-(-2)}{-4-(-8)}=\frac{-3+2}{-4+8}=\frac{-1}{4}$$

$B(-8\,,-2)$

$C(-4\,,-3)$

$$m_{AC}=\frac{-3-(-7)}{-4-(-5)}=\frac{-3+7}{-4+5}=\frac{4}{1}=4$$

$A(-5\,,-7)$

$C(-4\,,-3)$

$$\therefore m_{BC}\times m_{AC}=\frac{-1}{4}\times 4=-1$$

$\therefore \overleftrightarrow{BC}\perp\overleftrightarrow{AC}\quad ,\quad m\angle C=90°$

5) إثبت أن النقط : $A(0\,,-1), B(4\,,2), C\,(8,5)$ تقع على استقامة واحدة .

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m_{AB}=\frac{2-(-1)}{4-0}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$$

$A(0\,,-1)$

$B(4\,,2)$

$$m_{BC}=\frac{5-2}{8-4}=\frac{3}{4}$$

$B(4\,,2)$

$C(8\,,5)$

$m_{AB}=m_{BC}$

∴ النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة (اي تمثل خط مستقيم)

6) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-4\,,0)$ والعمودي على المستقيم المار بالنقطتين $(6\,,0), (3\,,-2)$.

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m_{\overleftrightarrow{L_2}}=\frac{0-(-2)}{6-3}=\frac{2}{3}$$

$(3\,,-2)$

$(6\ ,\ 0)$

∵ المستقيمان متعامدان ∴ ميل المستقيم $\left(\overleftrightarrow{L_1} = \frac{-3}{2}\right)$ اي هو (مقلوب ميل المستقيم $\overleftrightarrow{L_2}$ عكس الاشارة)

نكتب الان معادلة المستقيم والنقطة لايجاد معادلة المستقيم

$$m = \frac{-3}{2} \quad , \quad (-4\,,0)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{-3}{2}(x - (-4)) \Rightarrow y = \frac{-3}{2}(x + 4) \Rightarrow 2y = -3x - 12$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{-3x}{2} - \frac{12}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-3}{2}x - 6}$$

تدرب وحل التمرينات

7) المستقيم AB حيث $A(0\,,2)\,,B(3\,,0)$ المستقيم CD حيث $C(6\,,-2),\ D(9\,,-4)$ والمستقيم EF حيث $F(2\,,-2)\,,E(0\,,-5)$ ، ما علاقة $\overleftrightarrow{AB}$ بالمستقيمين $\overleftrightarrow{CD}\,,\overleftrightarrow{EF}$ ؟ بين ذلك .

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$A(0\,,2)$ ، $B(3,0)$

$$m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{0-2}{3-0} = \frac{-2}{3}$$

$C(6\,,-2)$ ، $D(9\,,-4)$

$$m_{\overleftrightarrow{CD}} = \frac{-4-(-2)}{9-6} = \frac{-4+2}{3} = \frac{-2}{3}$$

$C(0\,,-5)$ ، $D(2\,,-2)$

$$m_{\overleftrightarrow{EF}} = \frac{-2-(-5)}{2-0} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$$

$$m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow AB \;//\; CD$$

$$m_{AB} \times m_{EF} = -1 \Rightarrow \frac{-2}{3} \times \frac{3}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad AB \perp EF$$

8) هل النقط $A(0\,,-7), B(1\,,-1), C\,(2\,,3)$ تقع على مستقيم واحد ؟ بين ذلك . واجب

9) برهن أن الشكل $ABCD$ مستطيل حيث $A(1\,,4), B(2\,,6), C\,(8,3)\,, D(7\,,1)$.

الحل : نجد الميل بين كل نقطتين اي بين $AD\,,BC$ و $CD\,,\ AB$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$A(1\,,4)$ ، $B(2\,,6)$

$$m_{AB} = \frac{6-4}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

$C(8\,,3)$ ، $D(7\,,1)$

$$m_{CD} = \frac{1-3}{7-8} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$B(2\,,6)$ ، $C(8\,,3)$

$$m_{BC} = \frac{3-6}{8-2} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

$A(1\,,4)$

$D(7\,,1)$

$$m_{AD} = \frac{1-4}{7-1} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

$AB \perp BC\,,AD$

$CD \perp BC\,,AD$

$$m_{BC} = m_{AD} \quad , \quad m_{AB} = m_{CD}$$

$\therefore \angle A = 90^\circ \quad , \quad \angle B = 90^\circ$

$\therefore \angle C = 90^\circ \quad , \quad \angle D = 90^\circ$

$\therefore$ الشكل $ABCD$ يمثل مستطيل

10) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(1\,,-1)$ والموازي للمستقيم المار بالنقطتين $(6\,,0)\,,(3\,,-2)$. واجب

تدرب وحل مسائل حياتية

11) فيزياء : يمثل الجدول المجاور كمية المياه المتدفقة من احد السدود خلال فترة معينة من الزمن . هل بيانات الجدول تمثل خط مستقيم؟ بين ذلك .

المياه المتدفقة	
الزمن (ثوان)	حجم الماء m^3
5	75000
10	150000
15	225000

الحل :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$(5\,,75000)$

$(10\,,150000)$

$$m_1 = \frac{150000 - 75000}{10-5} = \frac{75000}{5} = 15000$$

$(10\,,150000)$

$(15\,,225000)$

$$m_2 = \frac{225000 - 150000}{15-10} = \frac{75000}{5} = 15000$$

$\therefore$ بيانات الجدول تمثل خطا مستقيما $\quad m_1 = m_2$

12) هندسة : برهن ان الشكل $ABCD$ شبه منحرف . حيث ان احداثيات القاعدة العليا $(6\,,2)\,,(4\,,5)$ والقاعدة السفلى $(2\,,-1)\,,(-2\,,5)$. هل هو قائم الزاوية؟ بين ذلك .

الحل :

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

القاعدة العليا $(4\,,5)$, $(6\,,2)$

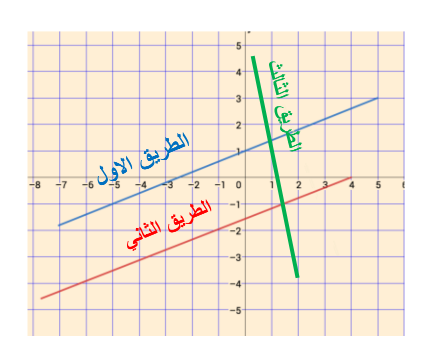
$$m_1 = \frac{2-5}{6-4} = \frac{-3}{2}$$

القاعدة السفلى $(-2\,,5)$, $(2\,,-1)$

$$m_2 = \frac{-1-5}{2-(-2)} = \frac{-6}{2+2} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}$$

$$m_1 \times m_2 = \frac{-3}{2} \times \frac{-3}{2} = \frac{9}{4} \neq -1$$





13) خريطة : استعمل الخريطة المجاورة لتبين أن :

(i) الطريق الاول يوازي الطريق الثاني .

(ii) الطريق الثاني عمودي على الطريق الثالث .

(iii) هل الطريق الاول عمودي على الطريق الثالث ؟ بين ذلك .

الحل : (i) الطريق الاول يقابل الطريق الثاني هذا يعني ان الطريقان متوازيان اي ان $m_1 = m_2$

(ii) الطريق الثاني يقطع الطريق الثالث هذا يعني ان الطريقان متعامدان : اي ان

$$m_2 \times m_3 = -1$$

(iii) الطريق الأول يقطع الطريق الثالث هذا يعني ان الطريقان متعامدان : اي ان

$$m_1 \times m_3 = -1$$

فكر

14) تحدٍّ : هل النقاط الاتية : $(2\,,3),(4\,,5),(-1\,,0),(-2\,,-1)$ تقع على استقامة واحدة ؟ بين ذلك . واجب

15) اصحح الخطأ : قال احمد ان المستقيم المار بالنقطتين $(0\,,4),(-3\,,0)$ عمودي على المستقيم المار بالنقطتين $(0\,,0),\left(1\,,\frac{3}{4}\right)$ اكتشف خطأ احمد وصححه .

الحل : $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$(-3\,,0)$

$(0\,,4)$

$$m_1 = \frac{4-0}{0-(-3)} = \frac{4}{3}$$

$\left(1\,,\frac{3}{4}\right)$

$(0\,,0)$

$$m_2 = \frac{0-\frac{3}{4}}{0-1} = \frac{-\frac{3}{4}}{-1} = \frac{3}{4}$$

$$m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} = 1 \neq -1$$

∴ المستقيمان ليس عموديان

16) مسألة مفتوحة : المعادلتين الآتيتان: $3y-5x=20\,,3y-5x=15$ تمثلان مستقيمين متوازيين ما التشابه والاختلاف بينهما؟ وضح ذلك

الحل :

$3y-5x=15$	$3y-5x=20$
$3y=5x+15$	$3y=5x+20$
$\frac{3y}{3}=\frac{5x}{3}+\frac{15}{3}$	$\frac{3y}{3}=\frac{5x}{3}+\frac{20}{3}$
$y=\frac{5}{3}x+5$	$y=\frac{5}{3}x+\frac{20}{3}$
$y=mx+k$	$y=mx+k$
$m_2=\frac{5}{3}\;,\;k_2=5$	$m_1=\frac{5}{3}\;,\;k_1=\frac{20}{3}$

$$m_1 = m_2 \;,\; k_1 \neq k_2$$

17) تبرير : لماذا النقاط التالية تقع على مستقيم يوازي محور السينات : $(-1,4), (0,4), (2,4)$ ؟

الحل : $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$(-1,4)$, $(0,4)$: $m_1 = \frac{4-4}{0-(-1)} = \frac{0}{1} = 0$

$(0,4)$, $(2,4)$: $m_2 = \frac{4-4}{2-0} = \frac{0}{2} = 0$

$m_1 = m_2$

∴ النقط تقع على استقامة واحدة وبما ان الميل يساوي صفر فهو يوازي محور السينات

18) أيهما اصح : قالت سارة ان ميل المستقيم $5y + 2x = 10$ هو $\frac{2}{5}$ ومقطعه هو 2 ، وقال مهند ان ميله $-\frac{2}{5}$ ومقطعه 2 ، بين اجابة أي منهما الصحيحة ؟

الحل :

$$5y + 2x = 10$$
$$5y = -2x + 10$$
$$\frac{5y}{5} = \frac{-2x}{5} + \frac{10}{5} \Rightarrow y = \frac{-2}{5}x + 2$$
$$y = mx + k$$
$$m = \frac{-2}{5} \quad , \quad k = 2$$

إجابة مهند صحيحة

19) مسألة مفتوحة : $ABCD$ معين رؤوسه $A(0,3), B(3,4), C(2,1), D(-1,0)$ برهن ان قطريه متعامدان .

الحل : الرسم مطلوب

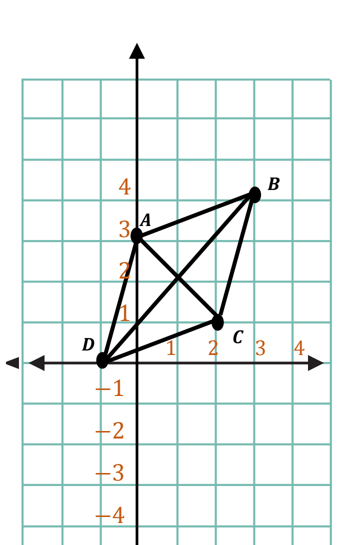
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$A(0,3)$, $C(2,1)$: $m_{AC} = \frac{1-3}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$

$B(3,4)$, $D(-1,0)$: $m_{BD} = \frac{0-4}{-1-3} = \frac{-4}{-4} = 1$

$$m_{AC} \times m_{BD} = -1 \times 1 = -1$$

∴ قطرا المعين متعامدين



20) مسألة مفتوحة : ما وجه التشابه والاختلاف بين المستقيمين المتوازيين ؟

الحل : يتشابه المستقيمان المتوازيان في ميلهما اي ان $m_1 = m_2$ ويختلفان في $k_1 \neq k_2$

أكتب : ما اذا كان المستقيمان متوازيين او متعامدين باستعمال ميلهما ؟

الحل : المستقيمان المتوازيان $m_1 = m_2$ والمستقيمان المتعامدان $m_1 \times m_2 = -1$

(اي ان ميل احدهما يساوي مقلوب ميل الثاني عكس الاشارة)

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

المسافة بين نقطتين

تعلم : ثلاثة اصدقاء خرجوا في رحلة استكشافية، محددة مواقعهم كما في الشكل المجاور . محمد يبعدمن أحمد $3\ km$ ومهند يبعد من أحمد $4km$. كيف تجد المسافه بين محمد و مهند ؟

فكرة الدرس :

- تعرف الى قانون المسافة بين نقطتين .
- تطبيق قانون المسافة بين نقطتين .
- تعرف الى قانون نقطة المنتصف .
- تطبيق قانون نقطة المنتصف .

المفردات :

- قانون المسافة بين نقطتين .
- نقطة المنتصف .
- قانون نقطة المنتصف .

قانون المسافة بين نقطتين

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال : في فقرة تعلم نجد أن موقع محمد هو النقطة $A(3,0)$ وإن موقع مهند هو النقطة $B(0\ ,4)$.

الحل :

$A(3\ ,0)$

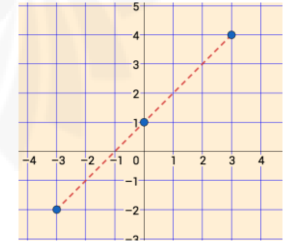
$B(0\ ,4)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$AB = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2}$$
$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

المسافة بين محمد ومهند $5\ km$

مثال : باستعمال قانون المسافة ، أثبت أن النقط $A(-3\ ,-2), B(0\ ,1), C\ (3\ ,4)$ تقع على استقامة واحدة .

الحل :



$A(-3\ ,-2)$

$B(0\ ,1)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$AB = \sqrt{(0-(-3))^2 + (1-(-2))^2}$$
$$AB = \sqrt{(3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$$
$$AB = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$BC = \sqrt{(3-0)^2 + (4-1)^2}$ $B(0\,,1)$

$BC = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ $C(3\,,4)$

$AC = \sqrt{(3-(-3))^2 + (4-(-2))^2}$ $A(-3\,,-2)$

$AC = \sqrt{(3+3)^2 + (4+2)^2}$ $C(3\,,4)$

$AC = \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

$$AC = AB + BC$$

$$6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

∴ النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة

مثال : بين نوع المثلث الذي رؤوسه $A(3,-4), B(5\,,-2), C\,(5\,,-6)$ من حيث الاضلاع . وهل المثلث قائم الزاوية؟

الحل :

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (-2-(-4))^2}$ $A(3\,,-4)$

$AB = \sqrt{(2)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$ $B(5,-2)$

$AB = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$BC = \sqrt{(5-5)^2 + (-6-(-2))^2}$ $B(5\,,-2)$

$BC = \sqrt{(0)^2 + (-6+2)^2} = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ $C(5\,,-6)$

$AC = \sqrt{(5-3)^2 + (-6-(-4))^2}$ $A(3\,,-4)$

$AC = \sqrt{(2)^2 + (-6+4)^2}$ $C(5\,,-6)$

$AC = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

المثلث متساوي الساقين $AB = AC$

$(\text{الوتر})^2 = (\text{الضلع القائم})^2 + (\text{الضلع القائم})^2$

$(4)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2$

$16 = 4(2) + 4(2) \Rightarrow 16 = 8 + 8$

∴ المثلث قائم الزاوية في A .

مثال : بين باستعمال قانون المسافة أن النقط $A(-2\,,3), B(-1\,,4), C\,(2\,,-1)\,, D(1\,,-2)$ رؤوس متوازي اضلاع .

الحل :

$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

$AB = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (4-3)^2}$ $A(-2\,,3)$

$AB = \sqrt{(-1+2)^2 + (1)^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$ $B(-1\,,4)$

$AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$BC = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-1-4)^2} \qquad B(-1\,,4)$$
$$BC = \sqrt{(2+1)^2 + (-5)^2} \qquad C(2\,,-1)$$
$$BC = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$
$$CD = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-(-1))^2} \qquad C(2\,,-1)$$
$$CD = \sqrt{(-1)^2 + (-2+1)^2} \qquad D(1\,,-2)$$
$$CD = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$AD = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-2-3)^2} \qquad A(-2\,,3)$$
$$AD = \sqrt{(1+2)^2 + (-5)^2} \qquad D(1\,,-2)$$
$$AD = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$
$$\therefore AB = CD \quad , \quad AD = BC$$

$\therefore$ الشكل $ABCD$ متوازي اضلاع (لأن من خواص متوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين متساويين بالطول)

قانون نقطة المنتصف

نقطة المنتصف : وهي النقطة الواقعة على بعدين متساويين على طرفي قطعة مستقيم وتنتمي له .

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

مثال : جد احداثي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين $A(3\,,-8), B(3\,,6)$.

الحل :

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$M = \left(\frac{3+3}{2}\,,\frac{-8+6}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}\,,\frac{-2}{2}\right) = (3\,,-1) \qquad A(3\,,-8)$$
$$B(3\,,6)$$

$\therefore$ $(3\,,-1)$ نقطة منتصف $\overline{AB}$

مثال : اذا كانت $M(1\,,-3)$ منتصف $\overline{AB}$ وكانت $A(-1\,,-2)$ جد إحداثي النقطة B .

الحل :

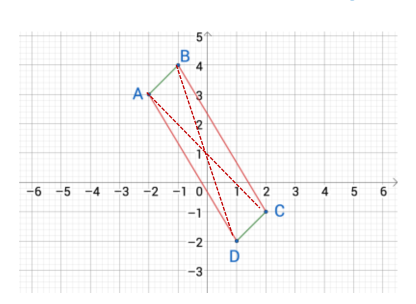
$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$(1\,,-3) = \left(\frac{-1+x}{2}\,,\frac{-2+y}{2}\right) \qquad A(-1\,,-2)$$
$$B(x\,,y)$$
$$\frac{-1+x}{2} = 1 \Rightarrow -1+x = 2 \Rightarrow x = 2+1 = 3$$
$$\frac{-2+y}{2} = -3 \Rightarrow -2+y = -6 \Rightarrow y = -6+2 = -4$$

$\therefore$احداثيات النقطة هي $B\ (3\,,-4)$



مثال : بين باستعمال قانون نقطة المنتصف أن النقط $A(-2\,,3), B(-1\,,4), C\,(2\,,-1)\,, D(1\,,-2)$ رؤوس متوازي اضلاع .

الحل :



$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M_1 = \left(\frac{-1+1}{2}\,,\frac{4+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}\,,\frac{2}{2}\right) = (0\,,1) \quad B(-1\,,4)\quad D(1\,,-2)$$

$$M_2 = \left(\frac{-2+2}{2}\,,\frac{3+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}\,,\frac{2}{2}\right) = (0\,,1) \quad A(-2\,,3)\quad C(2\,,-1)$$

$\because\ M_1 = M_2 \ \therefore$ الشكل $ABCD$ متوازي اضلاع (من خواص متوازي الاضلاع قطراه أحدهما ينصف الاخر)

مثال : $A(3,1), B(5\,,3), C\,(5\,,-1)$ رؤوس مثلث حيث $AB = AC$ النقطة M منتصف $\overline{BC}$ جد طول $\overline{AM}$.

الحل :

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M = \left(\frac{5+5}{2}\,,\ \frac{3+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{10}{2}\,,\ \frac{2}{2}\right) = (5\,,1) \qquad B(5\,,3)\quad C(5\,,-1)$$

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$AM = \sqrt{(5-3)^2+(1-1)^2} \qquad A(3\,,1)$$

$$AM = \sqrt{(2)^2+(0)^2} = \sqrt{4} = 2 \qquad M(5,1)$$

تأكد من فهمك

1) أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي :

$i)\ (0\,,0), (3\,,8)$ $\qquad ii)\ (-3,-1), (1\,,-4)$ $\qquad iii)\ (-1,-2), (3,-4)$

الحل :

$i)\ (0\,,0), (3\,,8)$

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(3-0)^2+(8-0)^2} \qquad (0\,,0)$$

$$d = \sqrt{(3)^2+(8)^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73} \qquad (3\,,8)$$

$ii)\ (-3,-1), (1\,,-4)$

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(1-(-3))^2+(-4-(-1))^2} \qquad (-3\,,-1)$$

$$d = \sqrt{(1+3)^2+(-4+1)^2} \qquad (1\,,-4)$$

$$d = \sqrt{(4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$iii)\ (-1,-2), (3,-4)$ واجب

2) أوجد نقطة المنتصف للافرع في السؤال 1 .

$i)\ (0,0),(3,8)$ $ii)\ (-3,-1),(1,-4)$ $iii)\ (-1,-2),(3,-4)$

الحل :

$i)\ (0,0),(3,8)$

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M=\left(\frac{0+3}{2},\ \frac{0+8}{2}\right) \qquad (0,0)$$

$$M=\left(\frac{3}{2},\ \frac{8}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\ 4\right) \qquad (3,8)$$

$ii)\ (-3,-1),(1,-4)$ واجب

$iii)\ (-1,-2),(3,-4)$ واجب

3) باستعمال قانون المسافة بين نقطتين ، أثبت أن النقط $A(-2,-1),B(-1,0),C(4,5)$ على استقامة واحدة .

الحل :

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$AB=\sqrt{(-1-(-2))^2+(0-(-1))^2} \qquad A(-2,-1)$$

$$AB=\sqrt{(-1+2)^2+(1)^2}=\sqrt{(1)^2+(1)^2} \qquad B(-1,0)$$

$$AB=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(4-(-1))^2+(5-0)^2} \qquad B(-1,0)$$

$$BC=\sqrt{(4+1)^2+(5)^2} \qquad C(4,5)$$

$$BC=\sqrt{(5)^2+(5)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(4-(-2))^2+(5-(-1))^2} \qquad A(-2,-1)$$

$$AC=\sqrt{(4+2)^2+(5+1)^2} \qquad C(4,5)$$

$$AC=\sqrt{(6)^2+(6)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$$

$$AC=AB+BC$$

$$6\sqrt{2}=\sqrt{2}+5\sqrt{2}$$

$\therefore$ النقط A , B , C تقع على استقامة واحدة

4) بين نوع المثلث الذي رؤوسه $A(2,4),B(-4,2),C(-1,-2)$ من حيث الاضلاع . وهل المثلث قائم الزاوية ؟ واجب

5) بين أن النقط الاتية : $A(4,0),B(6,-6),C(-8,0),D(-10,6)$ رؤوس متوازي الاضلاع .

i) باستعمال قانون المسافة بين نقطتين .

ii) باستعمال قانون نقطة المنتصف . واجب

6) اذا كانت $M(-2,0)$ منتصف $\overline{AB}$ وكانت $A(4\,,0)$ فجد إحداثيي النقطة B .

الحل :

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$(-2\,,0)=\left(\frac{4+x}{2},\ \frac{0+y}{2}\right) \qquad A(4\,,0)$$

$$B(x\,,y)$$

$$\frac{4+x}{2}=-2\Rightarrow 4+x=-4\Rightarrow x=-4-4=-8$$

$$\frac{0+y}{2}=-2\Rightarrow y=-4$$

$$B\,(-8\,,0)$$

تدرب وحل التمرينات

7) أوجد المسافة بين كل نقطتين فيما يأتي :

$i)\ (8\,,1),(-4\,,3)$ $\quad ii)\ (6\,,-9),(0\,,2)$ $\quad iii)\ (-2\,,4),(-6\,,-2)$

الحل :

$i)\ (8\,,1),(-4\,,3)$ واجب

$ii)\ (6\,,-9),(0\,,2)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d=\sqrt{(0-6)^2+(2-(-9))^2} \qquad (6\,,-9)$$

$$d=\sqrt{(-6)^2+(2+9)^2} \qquad (0\,,2)$$

$$d=\sqrt{(-6)^2+(11)^2}=\sqrt{36+121}=\sqrt{157}$$

$iii)\ (-2\,,4),(-6\,,-2)$ واجب

8) أوجد نقطة المنتصف للافرع في السؤال 7 .

$i)\ (8\,,1),(-4\,,3)$ $\quad ii)\ (6\,,-9),(0\,,2)$ $\quad iii)\ (-2\,,4),(-6\,,-2)$

الحل :

$i)\ (8\,,1),(-4\,,3)$

$$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M=\left(\frac{8+(-4)}{2},\ \frac{1+3}{2}\right) \qquad (8\,,1)$$

$$M=\left(\frac{4}{2},\ \frac{4}{2}\right)=(2\,,2) \qquad (-4\,,3)$$

$ii)\ (6\,,-9),(0\,,2)$ واجب

$iii)\ (-2\,,4),(-6\,,-2)$ واجب

9) باستعمال قانون المسافة بين نقطتين ، أثبت أن النقط $A(1\,,-3)\,,B(3\,,-4),C(-1\,,-2)$ على استقامة واحدة . واجب

10) بين نوع المثلث الذي رؤوسه $A(2\,,-1),B(2\,,1),C\,(-1\,,-1)$ من حيث الاضلاع . وهل المثلث قائم الزاوية؟

الحل :

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$A(2\,,-1)$ $B(2\,,1)$

$AB = \sqrt{(2-2)^2 + (1-(-1))^2}$

$AB = \sqrt{(0)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{0 + (2)^2}$

$AB = \sqrt{4} = 2$

$B(2\,,1)$ $C(-1\,,-1)$

$BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-1)^2}$

$BC = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$A(2\,,-1)$ $C(-1\,,-1)$

$AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-(-1))^2}$

$AC = \sqrt{(-3)^2 + (-1+1)^2}$

$AC = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9+0} = \sqrt{9} = 3$

$\therefore$ المثلث مختلف الاضلاع

$(\text{الوتر})^2 = (\text{الضلع القائم})^2 + (\text{الضلع القائم})^2$

$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$

$(\sqrt{13})^2 = (2)^2 + (3)^2$

$13 = 4 + 9$

$\therefore$ المثلث قائم الزاوية في A .

11) بين أن النقط $A(-3\,,5),B(2\,,7),C\,(1\,,9)\,,D(-4\,,7)$ رؤوس متوازي اضلاع .

i) باستعمال قانون المسافة بين نقطتين . واجب

ii) باستعمال قانون نقطة المنتصف .

الحل :

$M = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\,,\ \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$B(2\,,7)$ $D(-4\,,7)$

$M_1 = \left(\dfrac{2+(-4)}{2}\,,\dfrac{7+7}{2}\right) = \left(\dfrac{-2}{2}\,,\dfrac{14}{2}\right) = (-1\,,7)$

$A(-3\,,5)$ $C(1\,,9)$

$M_2 = \left(\dfrac{-3+1}{2}\,,\dfrac{5+9}{2}\right) = \left(\dfrac{-2}{2}\,,\dfrac{14}{2}\right) = (-1\,,7)$

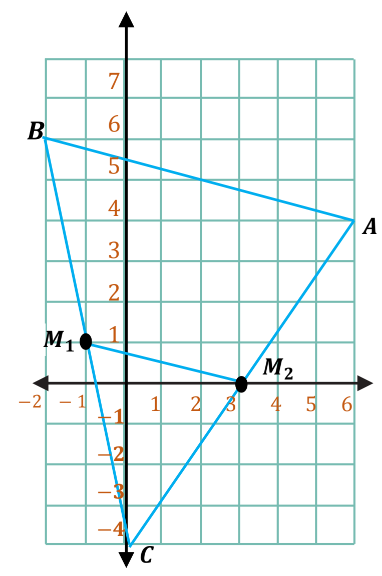
$\because M_1 = M_2$ $\therefore$ الشكل $ABCD$ متوازي اضلاع (من خواص متوازي الاضلاع قطراه أحدهما ينصف الاخر)

12) اذا كانت $M(4\,,-2)$ منتصف $\overline{AB}$ وكانت $B(5\,,1)$ فجد إحداثيي النقطة A . واجب

تدرب وحل مسائل حياتية

13) هندسة : ABC مثلث رؤوسه $A(6,4), B(-2,6), C(0,-4)$ ، تحقق من ان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين فيه يساوي نصف طول الضلع الثالث .

الحل : نجد نقط منتصف الضلعين BC ، AC



$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$M_1 = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{6+(-4)}{2}\right) = \left(\frac{-2}{2}, \frac{2}{2}\right) = (-1,1) \qquad B(-2,6) \quad C(0,-4)$$

$$M_2 = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{4+(-4)}{2}\right) = \left(\frac{6}{2}, \frac{0}{2}\right) = (3,0) \qquad A(6,4) \quad C(0,-4)$$

نجد طول القطعة المستقيمة الواصلة بين طولي ضلعين في المثلث ABC

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(3-(-1))^2 + (0-1)^2} \qquad M_1(-1,1)$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(3+1)^2 + (-1)^2} \qquad M_2(3,0)$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$AB = \sqrt{(-2-6)^2 + (6-4)^2} \qquad A(6,4)$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(-8)^2 + (2)^2} \qquad B(-2,6)$$

$$M_1M_2 = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$M_1M_2 = \frac{1}{2}AB$$

$$\sqrt{17} = \frac{1}{2}(2)\sqrt{17}$$

14) تحديد موقع : موقع بيت محمود عند النقطة $(-4,0)$ وموقع مدرسته عند النقطة $(0,-3)$ ما المسافة التي يقطعها محمود عند ذهابه الى المدرسة، علما ان طول ضلع كل مربع في المستوي الاحداثي يمثل كيلومتراً واحداً؟

الحل :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(0-(-4))^2 + (-3-0)^2} \qquad (-4,0)$$

$$d = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\ km \qquad (0,-3)$$

فكر

15) تحدًّ: دائرة طرفا احد اقطارها النقطتان $A(-1\,,1), B(5\,,1)$ جد :

i) إحداثيات مركزها ii) مساحتها

الحل : i) نجد نقطة منتصف AB

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M_1 = \left(\frac{-1+5}{2}\,,\frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}\,,\frac{2}{2}\right) = (2\,,1)$$

$B(-1\,,1)$

$C(5\,,1)$

ii) نجد طول المسافة بين AM_1 لأنها تمثل نصف القطر

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$r = \sqrt{(2-(-1))^2+(1-1)^2}$$

$A(-1\,,1)$

$$r = \sqrt{(2+1)^2+(0)^2} = \sqrt{(3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$M_1(2\,,1)$

$$A = r^2\pi \Rightarrow A = 3^2\pi = 9\pi$$

15) اكتشف الخطأ : وجدت شهد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي طرفيها $(6,1),(8,3)$ فكتبتها $\left(\frac{8-6}{2}\,,\frac{3-1}{2}\right) = (1\,,1)$ اكتشف خطأ شهد وصححه .

الحل :

$$M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\,,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M_1 = \left(\frac{8+6}{2}\,,\frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{14}{2}\,,\frac{4}{2}\right) = (7\,,2)$$

$(8\,,3)$

$(6\,,1)$

الخطأ هو قيام شهد بعملية الطرح بين $x_1x_2\,, y_1y_2$.

أكتب : علاقة قانون نقطة المنتصف بإيجاد الوسط الحسابي .

الحل :

لإيجاد الوسط الحسابي لعددين فأنك تجمعهما وتقسم الناتج على 2 ولايجاد احداثي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتين تجمع الإحداثيين السينيين وكذلك الاحداثيين الصاديين وتقسم ناتج كل من المجموعين على 2 وبهذا فإنك تجد المتوسط الحسابي لكل من الاحداثيين السينيين والاحداثيين الصاديين .

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖



النسب المثلثية



تعلم : وقف مساح على بعد d متر من بناية، ومن خلال جهازه نظر اعلى البناية بزاوية معينة .

- كيف تساعده النسب المثلثية في ايجاد ارتفاع البناية؟





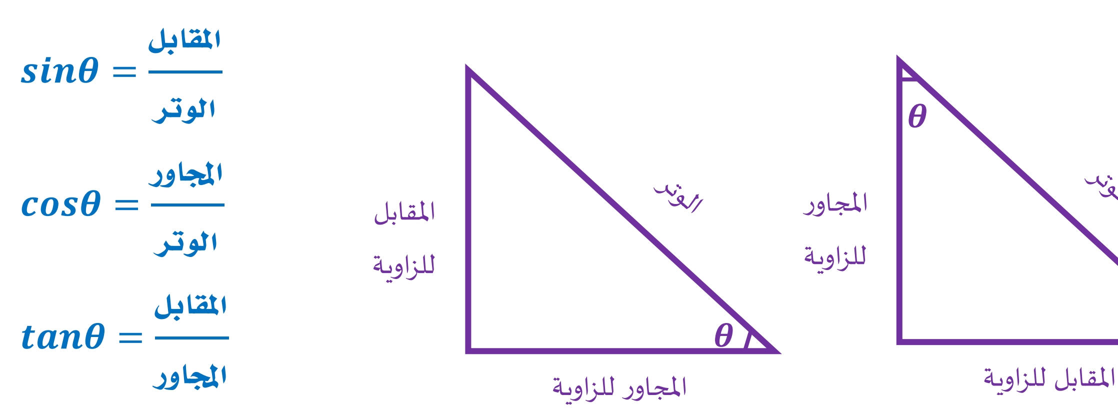
فكرة الدرس :

- تعرف على النسب المثلثية الاساسية .
- النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة ،
- ايجاد قيم عبارات تتضمن زوايا الخاصة .

المفردات :

- النسب المثلثية $sin , cos , tan , sec , csc , cot$
- الزوايا الخاصة $60° , 45° , 30° , 90° , 0°$

النسب المثلثية $(sin\theta , cos\theta , tan\,\theta)$



$$sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

مثال : من الشكل المجاور ، جد النسب المثلثية الثلاث للزاوية θ . استعمل مبرهنة فيثاغورس لايجاد طول الضلع AB المقابل .

(A, B, C, 5 cm, 4 cm, θ)

الحل : نستخدم مبرهنة فيثاغورس لايجاد طول AB (المقابل)

$$(\text{المقابل})^2 = (\text{الوتر})^2 - (\text{المجاور})^2$$

$$(AB)^2 = (AC)^2 - (BC)^2$$

$$(AB)^2 = (5)^2 - (4)^2$$

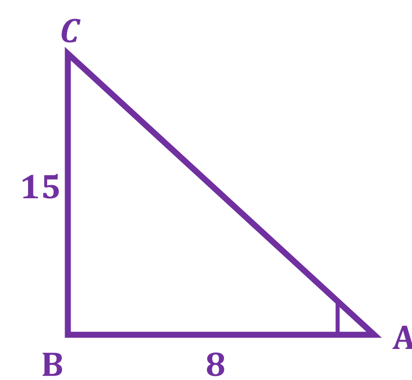
$$(AB)^2 = 25 - 16 = 9$$

$$(AB)^2 = 9 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AB = 3$$

$$sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \Rightarrow sin\theta = \frac{3}{5} \quad , \quad cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \Rightarrow cos\theta = \frac{4}{5}$$

$$tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \Rightarrow tan\theta = \frac{3}{4}$$

مثال : المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا كانت $\tan A = \frac{15}{8}$ جد $\cos A$, $\sin A$.



الحل : نستخدم مبرهنة فيثاغورس لايجاد طول AC (الوتر)

$$(\text{الوتر})^2 = (\text{المقابل})^2 + (\text{المجاور})^2$$
$$(AC)^2 = (BC)^2 + (AB)^2$$
$$(AC)^2 = (15)^2 + (8)^2$$
$$(AC)^2 = 225 + 64 = 289$$
$$(AC)^2 = 289 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AC = 17$$

$$\sin A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \Longrightarrow \sin A = \frac{15}{17} \quad , \quad \cos A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \Longrightarrow \cos A = \frac{8}{17}$$

النسب المثلثية للزوايا الخاصة :

النسب المثلثية	30°	60°	45°	90°	0°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1	غير معرف	0

مثال : اثبت أن $\sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30° = \sin 90°$

الحل :

الطرف الايسر $\sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30°$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

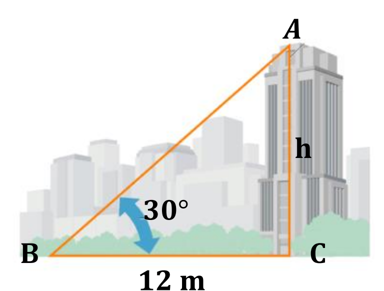
الطرف الايمن $\sin 90° = 1$

الطرف الايمن = الطرف الايسر

مثال : وقف رجل أمام بناية وعلى بعد $12m$ من قاعدتها ونظر الى قمة البناية بزاوية مقدارها $30°$.

الحل : العلاقة التي تحل بها المسألة هي $\tan$ لأن الوتر غير مطلوب

فنستخدم علاقة فيها مقابل ومجاور .



$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan 30 = \frac{h}{12} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{12}$$ طرفين في وسطين

$$\sqrt{3}h = 12 \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}h}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \Longrightarrow h = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

اذا اردنا تبسيط الناتج نضرب العامل المنسب للمقام وهو $\sqrt{3}$.

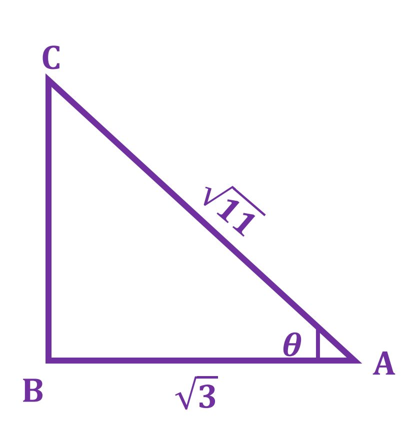
$$h=\frac{12}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$$

علاقات النسب المثلثية

النسبة المثلثية	$sin\theta$	$cos\theta$	$tan\theta$
مقلوبها	$csc\theta=\frac{1}{sin\theta}$	$sec\theta=\frac{1}{cos\theta}$	$cot\theta=\frac{1}{tan\theta}$

مثال : مثلث قائم الزاوية في B اذا كانت $cosA=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ فجد : $secA\ ,\ cscA\ ,cotA$

الحل : نستخدم مبرهنة فيثاغورس لايجاد طول AB (المقابل)



$$(\text{المقابل})^2=(\text{الوتر})^2-(\text{المجاور})^2$$
$$(BC)^2=(AC)^2-(AB)^2$$
$$(BC)^2=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2$$
$$(BC)^2=11-3=8$$
$$(BC)^2=8\overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow}BC=\sqrt{8}$$

$sec\ A\Longrightarrow\ cos\ A$ مقلوب , $csc\ A\Longrightarrow\ sin\ A$ مقلوب

$sec\ A=\frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}\Longrightarrow\ sec\ A=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$, $csc\ A=\frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}\Longrightarrow\ csc\ A=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{8}}$

$cot\ A\Longrightarrow\ tan\ A$ مقلوب $\qquad cot\ A=\frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}\Longrightarrow cot\ A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

مثال : جد القيمة العددية للمقدار :

$$(sin\ 45°)(sec\ 45°)-(tan60°)(cot30°)+2csc\ 90°$$

الحل :

$(sin\ 45°)(sec\ 45°)-(tan60°)(cot30°)+2csc\ 90°$

$sec\ 45\Longrightarrow\ cos\ 45$ مقلوب , $csc\ 90\Longrightarrow\ sin\ 90$ مقلوب , $cot\ 30\Longrightarrow\ tan\ 30$ مقلوب

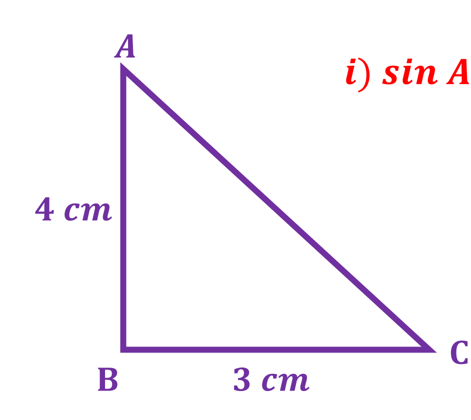
$sec\ 45°=\sqrt{2}$, $csc\ 90=1$, $cot\ 30=\sqrt{3}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)+2(1)=\ 1-3+2=1-1=0$

تأكد من فهمك

1) من الشكل المجاور ، جد النسب المثلثية الآتية :

$i)\ sin\ A \qquad ii)\ cos\ C \qquad iii)\ cot\ C \qquad iv)\ sec\ A$



الحل :

$$(\text{الوتر})^2 = (\text{المقابل})^2 + (\text{المجاور})^2$$
$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$(AC)^2 = (4)^2 + (3)^2$$
$$(AC)^2 = 16 + 9 = 25$$
$$(AC)^2 = 25 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AC = 5$$

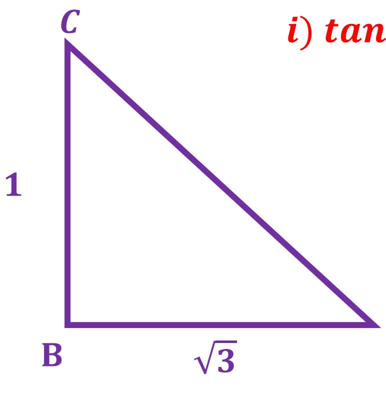
$i)\ sin\ A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \Rightarrow sin\ A = \frac{3}{5}$, $ii)\ cos\ C = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \Rightarrow cos\ C = \frac{3}{5}$

$iii)\ cot\ C \Rightarrow tan\ C$ مقلوب $\Rightarrow cot\ C = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} \Rightarrow cot\ C = \frac{3}{4}$

$iv)\ sec\ A \Rightarrow cos\ A$ مقلوب $\Rightarrow sec\ A = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \Rightarrow sec\ A = \frac{5}{4}$

2) في المثلث ABC القائم الزاوية في B إذا كانت $cot\ A = \sqrt{3}$ جد :

$i)\ tan\ A \qquad ii)\ sin\ A \qquad iii)\ csc\ A \qquad iv)\ cos\ A$



الحل : $cot\ A = \sqrt{3} \Rightarrow cot\ A = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$$(\text{الوتر})^2 = (\text{المقابل})^2 + (\text{المجاور})^2$$
$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
$$(AC)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2$$
$$(AC)^2 = 3 + 1 = 4$$
$$(AC)^2 = 4 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AC = 2$$

$i)\ tan\ A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \Rightarrow tan\ A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $ii)\ sin\ A = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \Rightarrow sin\ A = \frac{1}{2}$

$iii)\ csc\ A \Rightarrow sin\ A$ مقلوب $\Rightarrow csc\ A = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} \Rightarrow csc\ A = \frac{2}{1} = 2$

$iv)\ cos\ A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \Rightarrow cos\ A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال : اثبت ما يأتي :

$i)\ (\cos 30° - \csc 45°)(\sin 60° + \sec 45°) = \frac{-5}{4}$

الحل :

الطرف الايسر $(\cos 30° - \csc 45°)(\sin 60° + \sec 45°)$

$\csc 45° \Rightarrow \sin 45°$ مقلوب , $\sec 45° \Rightarrow \cos 45°$ مقلوب

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2}\right)$

تعتبر هذه (حدانية × حدانية) واشارة القوسين مختلفة فنرجعها الى اصلها وهو الفرق بين مربعين وكالاتي :

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (\sqrt{2})^2 = \frac{3}{4} - 2 = \frac{3}{4} - \frac{2}{1} = \frac{3-8}{4} = \frac{-5}{4}$ الطرف الايمن

الطرف الايمن = الطرف الايسر

$ii)\ 2\sin 30° \sec 30° = \csc 60°$

الحل :

الطرف الايسر $2\sin 30° \sec 30°$

$\sec 30° \Rightarrow \cos 30°$ مقلوب , $\csc 60° \Rightarrow \sin 60°$ مقلوب

$= 2\ \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

الطرف الايمن $\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ الطرف الايمن = الطرف الايسر

$iii)\ (\cos 45° - \csc 45°)(\tan 45°)(\csc 90°) = -\cos 45°$ واجب

$iv)\ \sqrt{\frac{1-\cos 60°}{2}} = \sin 30°$

الحل :

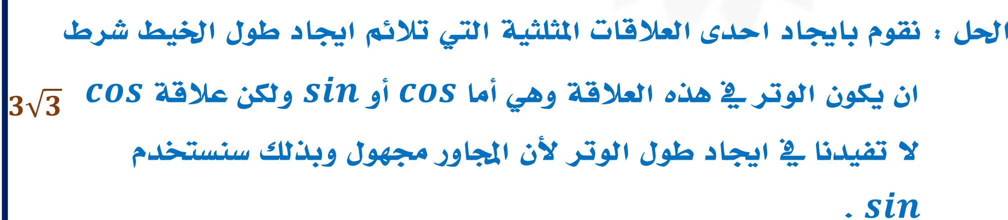
الطرف الايسر $\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

الطرف الايمن $\sin 30° = \frac{1}{2}$

$\therefore$ الطرف الايمن = الطرف الايسر

4) طائرة ورقية ارتفاعها $3\sqrt{3}\ m$ عن سطح الارض ، اذا كان الخيط المتصل يصنع زاوية مقدارها $60°$ مع الارض . جد طول الخيط .

طائرة
$x =$ طول الخيط
$3\sqrt{3}$
$60°$


الحل : نقوم بايجاد احدى العلاقات المثلثية التي تلائم ايجاد طول الخيط شرط ان يكون الوتر في هذه العلاقة وهي أما $\cos$ أو $\sin$ ولكن علاقة $\cos$ لا تفيدنا في ايجاد طول الوتر لأن المجاور مجهول وبذلك سنستخدم $\sin$.

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

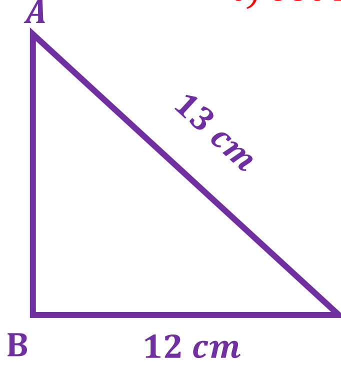
$$\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{x}$$ طرفين في وسطين

$$\sqrt{3}x = 6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 6$$ طول الخيط

تدرب وحل التمرينات

5) من الشكل المجاور ، جد النسب المثلثية الآتية :

$i)\ \cot A \qquad ii)\ \cot C \qquad iii)\ \sec C \qquad iv)\ \csc A$



الحل :

$$(\text{المقابل})^2 = (\text{الوتر})^2 - (\text{المجاور})^2$$
$$(AB)^2 = (AC)^2 - (BC)^2$$
$$(AB)^2 = (13)^2 - (12)^2$$
$$(AB)^2 = 169 - 144 = 25$$
$$(AB)^2 = 25 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AB = 5$$

$$i)\ \cot A \Rightarrow \tan A \text{ مقلوب} \Rightarrow \cot A = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} \Rightarrow \cot A = \frac{5}{12}$$

$$ii)\ \cot C \Rightarrow \tan C \text{ مقلوب} \Rightarrow \cot C = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} \Rightarrow \cot C = \frac{12}{5}$$

$$iii)\ \sec C \Rightarrow \cos C \text{ مقلوب} \Rightarrow \sec C = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \Rightarrow \sec C = \frac{13}{12}$$

$$iii)\ \csc A \Rightarrow \sin A \text{ مقلوب} \Rightarrow \csc A = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} \Rightarrow \csc A = \frac{13}{12}$$

6) في المثلث ABC القائم الزاوية في B إذا كانت $\sec A = \sqrt{2}$ جد : واجب

$i)\ \sin A \qquad ii)\ \cot C \qquad iii)\ \csc A \qquad iv)\ \cos C$

7) أثبت ما يأتي :

$i)\ \cos 60^\circ \csc 60^\circ + \sin 60^\circ \sec 60^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}}$ واجب

$ii)\ \sin 45^\circ \sec 45^\circ + \csc 45^\circ \sin 45^\circ = 2$

الحل :

الطرف الايسر $\sin 45^\circ\ \sec 45^\circ\ + \csc 45^\circ\ \sin 45^\circ$



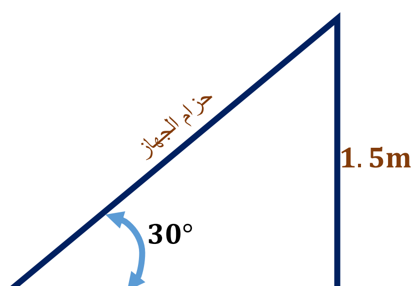
$csc\ 45° \Rightarrow sin\ 45°$ مقلوب , $sec45° \Rightarrow cos\ 45°$ مقلوب

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + 1 = 2$ الطرف الايمن

الطرف الايمن = الطرف الايسر

تدرب وحل مسائل حياتية

8) رياضة: عمل جهاز رياضي مائل لتمرين السير بزاوية قدرها $30°$ ، فإذا كان طرف الجهاز يرتفع $1.5\ m$ سطح الارض . فما طول حزام الجهاز ؟



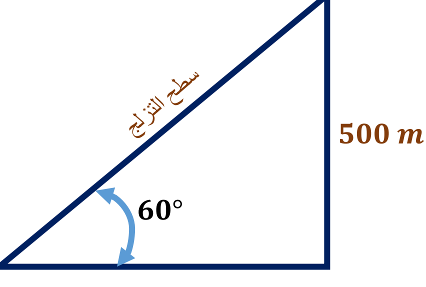
الحل : نفرض حزام الجهاز $= x$

$$sin\ \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$sin\ 30 = \frac{1.5}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1.5}{x}$ نضرب طرفين في وسطين

$x = 2\ (1.5) = 3\ m$ طول الحزام

9) تزلج على الجليد : في موقع للتزلج على احد التلال، كان ارتفاع التلة الرئيسية $500\ m$ وزاوية ميلها عن مستوى الارض $60°$. ماطول سطح التزلج ؟



الحل : نفرض ارتفاع التلة $= x$

$$sin\ \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$sin\ 60 = \frac{500}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{500}{x}$ نضرب طرفين في وسطين

$$\sqrt{3}x = 1000 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{3}} = \frac{1000}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{1000}{1.7} = 588\ m$$

10) سلم اطفاء الحرائق :سلم اطفاء حريق طوله $20\ m$ يرتكز احد طرفيه على بناية والطرف الآخر على ارض افقية بزاوية $45°$ ، جد ارتفاع نقطة ارتكاز طرف السلم على البناية . واجب

11) حديقة : وقفت بنان على بعد $25\ m$ من قاعدة شجرة ارتفاعها $25\ m$ فما قياس الزاوية التي تشكلها مع قمة الشجرة ؟

25 m

بنان   25 m   قاعدة الشجرة

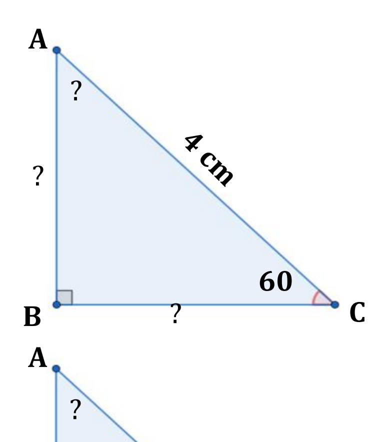
الحل : نستخدم في هذه الحالة $tan\ \theta$ لأن المقابل والمجاور معلوم ولا نحتاج للوتر .

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$\tan\theta = \frac{25}{25} \Longrightarrow \tan\theta = 1 \Longrightarrow \theta = 45^\circ$$

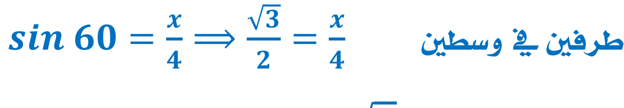
فكر

12) تحد : في الشكل المجاور ، جد القيم المؤشرة(؟) باستعمال النسب المثلثية .

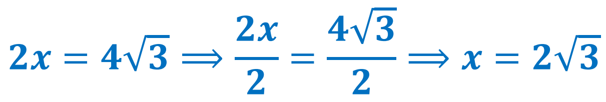


الحل : نفرض المقابل $x =$ نفرض المجاور $y =$

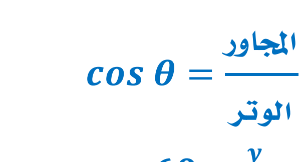
$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$



$$\sin 60 = \frac{x}{4} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{4}$$ طرفين في وسطين



$$2x = 4\sqrt{3} \Longrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x = 2\sqrt{3}$$



$$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\cos 60 = \frac{y}{4} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{y}{4}$$ نضرب طرفين في وسطين

$$2y = 4 \Longrightarrow \frac{2y}{2} = \frac{4}{2}$$

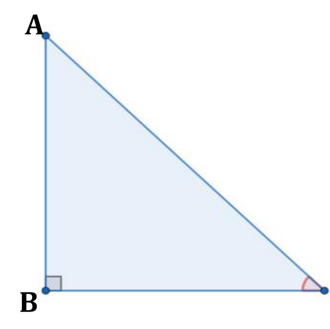
$$y = 2$$

الزاوية قائمة فإن $B = 90^\circ$ ، $\angle C = 60^\circ$

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180$$

$$\therefore \angle A + 90^\circ + 60^\circ = 180 \Longrightarrow \angle A + 150^\circ = 180 \Longrightarrow \angle A = 180 - 150^\circ = 30^\circ$$

13) مسألة مفتوحة : ABC مثلث قائم الزاوية في B, $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ كيف تجد قيمة الزاوية C ؟



الحل : $\angle B = 90^\circ$ زاوية قائمة ، $in\ A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow A = 60^\circ$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Longrightarrow 60 + 90 + \angle C = 180^\circ$$

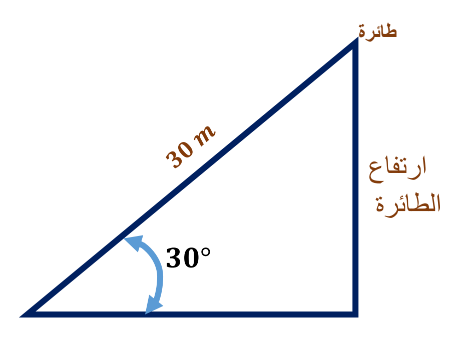
$$150 + \angle C = 180 \Longrightarrow \angle C = 180 - 150 \Longrightarrow \angle C = 30^\circ$$

14) تبرير : اذا كان جيب زاوية وجيب تمامها متساويين في مثلث قائم الزاوية . ما نوع المثلث من حيث اطوال اضلاعه؟

الحل : نوع المثلث متساوي الساقين .

أكتب : مسألة تستعمل فيها نسبة الجيب لايجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية ثم حلها.

مسألة : طائرة ورقية طول خيطها $30\ m$ فإذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الارض 30 جد ارتفاع الطائرة الورقية عن الارض .



الحل : نفرض ارتفاع الطائرة $= x$

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin 30 = \frac{x}{30} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{30}$$ نضرب طرفين في وسطين

$$2x = 30 \Rightarrow \frac{2\,x}{2} = \frac{30}{2} \Rightarrow x = 15$$ ارتفاع الطائرة

تدريب: جد القيمة العددية للمقدار $(\sin 60°)^2(\tan 45°)^2 + (\sin 30°)^2$

الحل :

$$(\sin 60°)^2(\tan 45°)^2 + (\sin 30°)^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \quad (1)^2 \quad + \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad = \frac{3}{4}(1) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

تدريب : جد القيمة العددية للمقدار $(\tan 60°)^2 + (\cot 45°)^2 + (\sec 30°)^2 + (\sin 45°)^2$ واجب

تدريب : اثبت أن : $(\cos 60°)^2 - (\sin 60°)^2 = -\frac{1}{2}$

الحل :

الطرف الايمن $(\cos 60°)^2 - (\sin 60°)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$ الطرف الايسر

اختبار الفصل

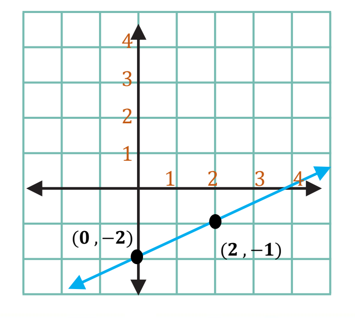
1) مثل المعادلات التالية في المستوي الاحداثي :

$i)\ \ 2x - 4y = 8$

مثال : مثل المعادلة $2y - x = 0$ في المستوي الاحداثي :

الحل :

x	$2x - 4y = 8$	(x, y)
0	$2(0) - 4y = 8$ $-4y = 8 \Rightarrow \frac{-4y}{-4} = \frac{8}{-4} \Rightarrow y = -2$	$(0, -2)$
2	$2(2) - 4y = 8 \Rightarrow 4 - 4y = 8$ $-4y = 8 - 4 \Rightarrow \frac{-4y}{-4} = \frac{4}{-4} \Rightarrow y = -1$	$(2, -1)$



$ii)\ \ y = 2$ واجب

$iii)\ x = 2$ واجب

$iv)\ \ y = x^2 - 1$ محلول

2) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين : $A(-2\,,-3)\,,B(2\,,3)$

الحل : $A(-2\,,-3)$

$B(2\,,3)$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Longrightarrow \frac{y-(-3)}{x-(-2)} = \frac{3-(-3)}{2-(-2)}$$

$\frac{y+3}{x+2} = \frac{3+3}{2+2} \Longrightarrow \frac{y+3}{x+2} = \frac{6}{4}$ نضرب طرفين في وسطين

$$4y + 12 = 6x + 12 \Longrightarrow 4y = 6x + 12 - 12 \Longrightarrow 4y = 6x \Longrightarrow \frac{4y}{4} = \frac{6x}{4}$$

$y = \frac{3}{2}x$ معادلة المستقيم

3) جد المقطع السيني والمقطع الصادي للمعادلة الاتية :

$7)\,y - x = 4$

$x = \frac{c}{a} \Longrightarrow x = \frac{4}{-1} = -4$ المقطع السيني

$y = \frac{c}{b} \Longrightarrow y = \frac{4}{1} = 4$ المقطع الصادي

4) جد معادلة المستقيم لكل مما يأتي :

i) يمر بالنقطتين $(3\,,-2),(1\,,5)$. واجب

ii) ميله $\frac{3}{2}$ ومقطعه الصادي يساوي -5 .

iii) ميله $\frac{-1}{5}$ ومقطعه السيني يساوي 3 . واجب

$ii)$ ميله $\frac{3}{2}$ ومقطعه الصادي يساوي -5

الحل : $m = \frac{3}{2}\ \ ,\ \ y = -5 \Longrightarrow (0\,,-5)$

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

$$y - (-5) = \frac{3}{2}\ (x - 0) \Longrightarrow y + 5 = \frac{3}{2}\,x \Longrightarrow 2y + 10 = 3x$$

$$2y + 10 = 3x \Longrightarrow 2y = 3x - 10 \Longrightarrow \frac{2y}{2} = \frac{3x}{2} - \frac{10}{2} \Longrightarrow y = \frac{3}{2}x - 5$$

5) استعمل معادلة الميل والنقطة لتحديد ميل المستقيم واحدى نقاطه $2y - 3x = 8$.

الحل : $2y - 8 = 3x$

$$2y - 8 = 3x] \overset{\div 2}{\Longrightarrow} \frac{2y}{2} - \frac{8}{2} = \frac{3x}{2} \Longrightarrow y - 4 = \frac{3}{2}x$$

$$y - 4 = \frac{3}{2}\ (x - 0)$$

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

$$m = \frac{3}{2}\ \ ,\ \ (0\,,4)$$

6) باستعمال الميل بين ما يأتي :

i) النقاط $A(3\,,2), B(0\,,-1), D(1\,,0)$ على استقامة واحدة .

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m_{AB}=\frac{-1-2}{0-3}=\frac{-3}{-3}=1 \qquad A(3\,,2) \quad B(0\,,-1)$$

$$m_{BD}=\frac{0-(-1)}{1-0}=\frac{1}{1}=1 \qquad B(0\,,-1) \quad D(1\,,0)$$

$$m_{AB}=m_{BD}$$

∴ النقط $A\,,B\,,D$ تقع على استقامة واحدة (اي تمثل خط مستقيم)

ii) النقاط التالية رؤوس لمتوازي الاضلاع $A(4\,,-1), B(2,2), C(-2\,,4), D(0\,,1)$. واجب

iii) المستقيم المار بالنقطتين $A(3\,,1), B(4\,,-1)$ عمودي على المستقيم المار بالنقطتين $C\,(4\,,-1), D(0\,,-3)$.

الحل :

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m_{\overleftrightarrow{AB}}=\frac{-1-1}{4-3}=\frac{-2}{1}=-2 \qquad A(3\,,1) \quad B(4\,,-1)$$

$$m_{\overleftrightarrow{CD}}=\frac{-3-(-1)}{0-4}=\frac{-3+1}{-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2} \qquad C(4\,,-1) \quad D(0\,,-3)$$

$$m_{\overleftrightarrow{AB}}\times m_{\overleftrightarrow{CD}}=-1 \Rightarrow -2\times\frac{1}{2}=-1$$

∴ المستقيم AB عمودي على المستقيم CD .

7) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $C\,(0\,,3)$ والموازي للمستقيم الذي ميله $\frac{-2}{3}$.

الحل :

∵ المستقيمان متوازيان ∴ ميل المستقيم المطلوب $=\frac{-2}{3}$

نكتب الان معادلة المستقيم والنقطة لايجاد معادلة المستقيم

$$m=\frac{-2}{3} \quad , \quad C(0\,,3)$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-3=\frac{-2}{3}(x-0) \Rightarrow y-3=\frac{-2}{3} \Rightarrow 3y-9=-2x \Rightarrow 3y=-2x+9$$

$$\frac{3y}{3}=\frac{-2}{3}x+\frac{9}{3} \Rightarrow y=\frac{-2}{3}x+3 \quad \text{معادلة المستقيم}$$

8) باستعمال قانون المسافة بين نقطتين أثبت $(i)\,,(ii)$ في السؤال 6 . واجب

9) باستعمال قانون نقطة المنتصف أثبت (ii) في السؤال 6 .

الحل :

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$M_1 = \left(\frac{4 + (-2)}{2} , \frac{-1 + 4}{2}\right) = \left(\frac{2}{2} , \frac{3}{2}\right) = \left(1 , \frac{3}{2}\right) \qquad A(4 , -1)$$

$C(-2 , 4)$

$$M_2 = \left(\frac{2 + 0}{2} , \frac{2 + 1}{2}\right) = \left(\frac{2}{2} , \frac{3}{2}\right) = \left(1 , \frac{3}{2}\right) \qquad B(2, 2)$$

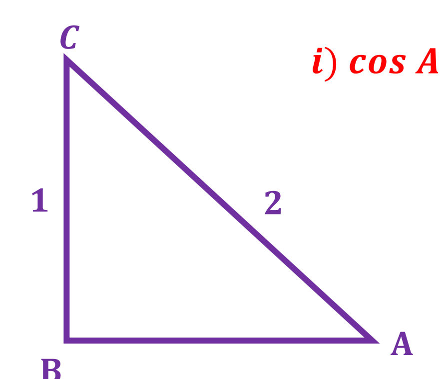
$C(0 , 1)$

$\because \; M_1 = M_2 \;\; \therefore$ الشكل $ABCD$ متوازي اضلاع (من خواص متوازي الاضلاع قطراه أحدهما ينصف الاخر)

$iv)\ sec\ A \Rightarrow\ cos\ A$ مقلوب $\Rightarrow sec\ A = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \Rightarrow sec\ A = \frac{5}{4}$

10) في المثلث ABC القائم الزاوية في B إذا كانت $sin\ A = \frac{1}{2}$ جد :

$i)\ cos\ A \qquad ii)\ tan\ A \qquad iii)\ cot\ C \qquad iv)\ sec\ A$



الحل :

$$sin\ A = \frac{1}{2}$$

$$(\text{المجاور})^2 = (\text{الوتر})^2 - (\text{المقابل})^2$$

$$(AB)^2 = (AC)^2 - (BC)^2$$

$$(AB)^2 = (2)^2 - (1)^2$$

$$(AB)^2 = 4 - 1 = 3$$

$$(AB)^2 = 3 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AB = \sqrt{3}$$

$i)\ cos\ A = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \Rightarrow\ cos\ A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $ii)\ tan\ A = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \Rightarrow\ tan\ A = \frac{1}{2}$

$iii)\ cot\ C \Rightarrow\ tan\ C$ مقلوب $\Rightarrow cot\ C = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} \Rightarrow cot\ C = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$iv)\ sec\ A \Rightarrow\ cos\ A$ مقلوب $\Rightarrow sec\ A = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \Rightarrow sec\ A = \frac{2}{\sqrt{3}}$

الفصل الخامس

الهندسة والقياس



الفصل الخامس

الهندسة والقياس

المضلعات والمجسمات (الهرم والمخروط)

تعرفت سابقا على المضلعات المنتظمة وغير المنتظمة وكيفية ايجاد الزوايا الداخلية والخارجية للمضلع المنتظم وكذلك تعرفت على كيفية ايجاد الزاوية المركزية للمضلع . واستطعت التمييز بين المضلع المقعر والمضلع المحدب وسوف تتمكن في هذا الدرس من ايجاد مساحة ومحيط المضلعات المنتظمة.


فكرة الدرس :

- أجد محيط ومساحة المضلعات المنتظمة .
- اجد الحجم والمساحة الكلية لكل من الهرم والمخروط .

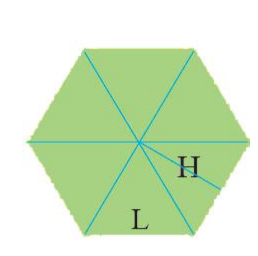

المفردات :

- العامد
- الارتفاع الجانبي
- المخروط
- الهرم

المضلعات المنتظمة

محيط المضلع المنتظم = عدد الاضلاع × طول الضلع $P = n \times L$

مساحة المضلع المنتظم = مساحة المثلث × عدد اضلاعه $A = \frac{1}{2} L \times H \times n$



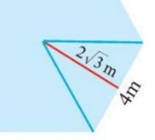
طول الضلع : L

العامد (الارتفاع) : H (وهو العمود النازل من مركز المضلع على أحد اضلاع المضلع)

مساحة المثلث : = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع (العامد) $A = \frac{1}{2} L \times H$

مثال : جد محيط ومساحة الشكل السداسي المنتظم ، طول ضلعه $4m$ وطول العامد $2\sqrt{3}\ m$.

الحل : $n = 6$ (عدد الاضلاع للشكل)

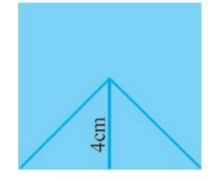


$$P = n \times L \Rightarrow P = 6 \times 4 = 24\ m^2$$

$$A = \frac{1}{2} L \times H \times n \Rightarrow A = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3} m^2$$

مثال : جد محيط ومساحة الشكل السداسي المنتظم ، طول ضلعه $4m$ وطول العامد $2\sqrt{3}\ m$.


الحل : $n = 4$ (عدد الاضلاع للشكل) (طريقة ١)



$$A = \frac{1}{2} L \times H \times n$$



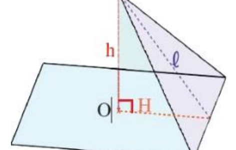
طول ضلع المربع $L = 4 \times 2 = 8\ cm$

$$A = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times 4 = 64\ cm^2$$

(طريقة ٢) مساحة المربع = طول الضلع × طول الضلع

$$A = L \times L \Longrightarrow A = 8 \times 8 = 64$$

الهرم: هو مجسّم له في الاقل ثلاثة اوجه مثلثة الشكل وله قاعدة واحدة تعبر عن شكل مضلع (شكل القاعدة يحدد اسم الهرم) .

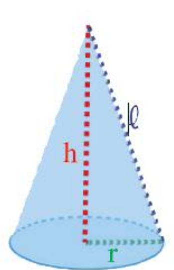


h = الارتفاع ، H = العامد ، ℓ =الارتفاع الجانبي

المخروط: هو مجسّم له قاعدة واحدة فقط عبارة عن دائرة وله رأس واحد.

ℓ =الارتفاع الجانبي (مولد المخروط) ، h = الارتفاع ، r = نصف القطر

$$\ell^2 = h^2 + r^2$$



قوانين				
المساحات	الهرم المنتظم	المخروط القائم	الهرم والمخروط	
المساحة الجانبية	$LA = \frac{1}{2} P \times \ell$ P : محيط القاعدة	$LA = \pi r \times \ell$ ℓ : الارتفاع الجانبي	حجم الهرم	$V = \frac{1}{3} b \times h$ b : المساحة
المساحة الكلية	$TA = \frac{1}{2} P \times \ell + b$ b : مساحة القاعدة	$TA = \pi r \times \ell + \pi r^2$	حجم المخروط	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

مثال : جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لهرم منتظم ارتفاعه الجانبي $8\ cm$ وقاعدته مربعة طول ضلعها $3\ cm$

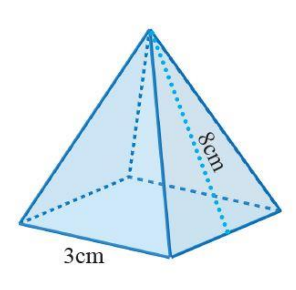
الحل : المساحة الجانبية

$$LA = \frac{1}{2} P \times \ell \Longrightarrow LA = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48\ cm^2$$

المساحة الكلية

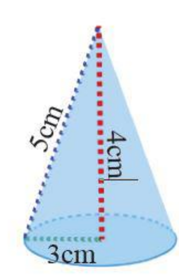
مساحة القاعدة = مساحة المربع $b = L \times L \Longrightarrow b = 3 \times 3 = 9$

$$TA = \frac{1}{2} P \times \ell + b \Longrightarrow TA = 48 + 9 = 57\ cm^2$$



مثال : استخدم الشكل المجاور لأيجاد : (i) الحجم (ii) المساحة الكلية (iii) المساحة الجانبية

الحل :

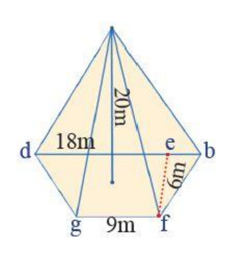


$$i)\ LA = \pi r \times \ell \implies LA = \pi \times 3 \times 5 = 15\pi\ cm^2$$

$$ii)\ TA = \pi r \times \ell + \pi r^2 \implies TA = 15\pi + \pi(3)^2 = 15\pi + 9\pi = 24\pi\ cm^2$$

$$iii)\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h \implies V = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 4 \implies V = 3\pi \times 4 = 12\pi\ cm^3$$

مثال : جد حجم الهرم المجاور :



الحل : القاعدة هي عبارة عن شكل شبه منحرف فان مساحة القاعدة هي مساحة شبه المنحرف

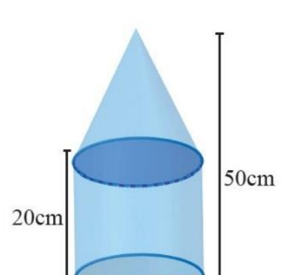
مساحة شبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ (مجموع طول ضلع القاعدتين) × الارتفاع

$$b = \frac{1}{2}(gf + bd) \times fe = \frac{1}{2}(9 + 18) \times 6 = 81\ m^2$$

$$V = \frac{1}{3} b \times h \implies V = \frac{1}{3} \times 81 \times 20 = 540\ m^3$$

مثال : جد حجم المجسم المركب المجاور .

الحل : لإيجاد حجم المجسم المركب نجد أولاً حجم الاسطوانة وحجم المخروط وبعد ذلك نجمع الحجوم لنجد حجم المجسم المركب .



$$V_1 = \pi r^2 h \implies V_1 = \pi(6)^2 \times 20 = 36\pi \times 20 = 720\pi\ cm^3$$

$h = 50 - 20 = 30$ ارتفاع المخروط

$$V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi \times h \implies V_2 = \frac{1}{3}(6)^2 \pi \times 30 = 360\pi\ cm^3$$

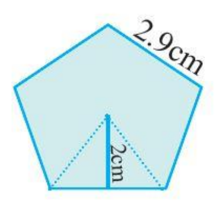
$$V = V_1 + V_2 \implies V = 720\pi + 360\pi = 1080\pi\ cm^3$$

تأكد من فهمك

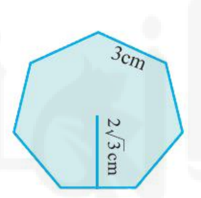
جد محيط ومساحة كل مضلع منتظم :



1)



2)



1) الحل :

$$H = 2\ ,\ L = 2.9\ ,\ n = 5$$

المحيط $P = n \times L = 5 \times 2.9 = 14.9\ cm$

المساحة $A = \frac{1}{2} L \times H \times n = \frac{1}{2} \times 2.9 \times 2 \times 5 = 14.9\ cm^2$

2) الحل :

$$H = 2\sqrt{3}\ ,\ L = 3\ ,\ n = 7$$

المحيط $P = n \times L = 7 \times 3 = 21\ cm$

$A=\frac{1}{2}L\times H\times n=\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{3}\times 7=21\sqrt{3}\ cm^2$ المساحة

3) جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية لكلّ مما يأتي :

i) مخروط دائري قائم : مساحة قاعدته $225\pi\ cm^2$ ، محيط قاعدته 30π cm ، ارتفاعه $20\ cm$ ، ارتفاعه الجانبي $25\ cm$.

ii) هرم : مساحة قاعدته $54\sqrt{3}\ cm^2$ ، محيط قاعدته $36\ cm$ ، ارتفاعه $3\sqrt{6}\ cm$ ، ارتفاعه الجانبي $9\ cm$.

الحل :

i) $b=225\pi\quad,\quad p=30\pi\quad,\quad h=20\quad,\quad \ell=25$

$\ell^2=h^2+r^2 \Longrightarrow (25)^2=(20)^2+r^2 \Longrightarrow 625=400+r^2$

$r^2=625-400 \Rightarrow r^2=225 \xrightarrow{\text{بالجذر}} r=15\ cm$

$LA=\pi r\times\ell \Longrightarrow LA=\pi\times 15\times 25=750\pi\ cm^2$

$TA=\pi r\times\ell+\pi r^2 \Longrightarrow TA=750\pi+\pi(15)^2=750\pi+225\pi=975\pi\ cm^2$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2\times h \Longrightarrow V=\frac{1}{3}\pi(15)^2\times 20 \Longrightarrow V=\frac{1}{3}(225)\pi\times 20=75\pi\times 20=1500\pi\ cm^3$

ii) $b=54\sqrt{3}\quad,\quad p=36\quad,\quad h=3\sqrt{6}\quad,\quad \ell=9$

$LA=\frac{1}{2}p\times\ell \Longrightarrow LA=\frac{1}{2}\times 36\times 9=162\ cm^2$

$TA=\frac{1}{2}p\times\ell+b \Longrightarrow TA=162+54\sqrt{3}=162+54(1.7)=162+91.8=253.8\ cm^2$

$V=\frac{1}{3}b\times h \Longrightarrow V=\frac{1}{3}\times 54\sqrt{3}\times 3\sqrt{6} \Longrightarrow V=54\sqrt{3}\times\sqrt{6}=54\sqrt{18}=54\times 3\sqrt{2}=108\sqrt{2}\ cm^3$

4) جد الحجم والمساحة الجانبية والكلُية لكلّ مما يأتي:

i) هرم قاعدته مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه $6\ cm$ وارتفاعه $\sqrt{33}\ cm$ وارتفاعه الجانبي $6\ cm$.

ii) هرم قاعدته مربعة طول ضلعها $12\ cm$ وارتفاعه $8\ cm$ وارتفاعه الجانبي $10\ cm$.

الحل :

i) واجب

ii) $L=12\quad,\quad h=8\quad,\quad \ell=10$

$b=L\times L=12\times 12=144\ cm^2$ مساحة القاعدة المربعة

$V=\frac{1}{3}b\times h \Longrightarrow V=\frac{1}{3}\times 144\times 8=48\times 8=384\ cm^3$

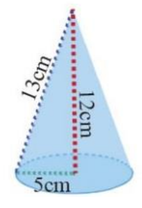
$P=4\times L=4\times 12=48\ cm$ محيط المربع

$LA=\frac{1}{2}p\times\ell \Longrightarrow LA=\frac{1}{2}(48)\times 10=24\times 10=240\ cm^2$ المساحة الجانبية

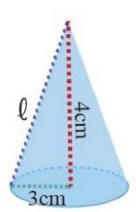
$TA=\frac{1}{2}p\times\ell+b \Longrightarrow TA=240+144=384\ cm^2$ المساحة الكلية

5) جد الحجم والمساحة الجانبية والكلّية مستعملاً الاشكال ادناه .

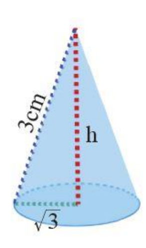
i)



ii)



iii)



الحل :

i) $\ell = 13\ cm \quad , \quad r = 5\ cm \quad , \quad h = 12\ cm$

الحجم $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(5)^2 \times 12 \Rightarrow V = \frac{1}{3}(25)\pi \times 12 = 25\pi \times 4 = 100\pi\ cm^3$

المساحة الجانبية $LA = \pi r \times \ell \Rightarrow LA = \pi \times 5 \times 13 = 65\pi\ cm^2$

المساحة الكلية $TA = \pi r \times \ell + \pi r^2 \Rightarrow TA = 65\pi + \pi(5)^2 = 65\pi + 25\pi = 90\pi\ cm^2$

ii) $\ell = ? \quad , \quad r = 3 \quad , \quad h = 4$

$\ell^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = (4)^2 + (3)^2 \Rightarrow \ell^2 = 16 + 9 = 25$

$\ell^2 = 25 \xRightarrow{\text{بالجذر}} \ell = 5\ cm$

الحجم $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 4 \Rightarrow V = \frac{1}{3}(9)\pi \times 4 = 3\pi \times 4 = 12\pi\ cm^3$

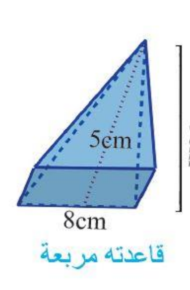
المساحة الجانبية $LA = \pi r \times \ell \Rightarrow LA = \pi \times 3 \times 5 = 15\pi\ cm^2$

المساحة الكلية $TA = \pi r \times \ell + \pi r^2 \Rightarrow TA = 15\pi + \pi(3)^2 = 15\pi + 9\pi = 24\pi\ cm^2$

iii) واجب

6) جد الحجم والمساحة الجانبية والمساحة الكلية لما يلي :





قاعدة مربعة

$\ell = 5 \quad , \quad h = 3 \quad , \quad L = 8$

مساحة القاعدة المربعة $b = L \times L = 8 \times 8 = 64\ cm^2$

الحجم $V = \frac{1}{3}b \times h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \times (64) \times 3 = 64\ cm^3$

محيط المربع $P = 4 \times L = 4 \times 8 = 32\ cm$

المساحة الجانبية $LA = \frac{1}{2}p \times \ell \Rightarrow LA = \frac{1}{2}(32) \times 5 = 16 \times 5 = 80\ cm^2$

المساحة الكلية $TA = \frac{1}{2}p \times \ell + b \Rightarrow TA = 80 + 64 = 144\ cm^2$

- مساحة المثلث المتساوي الساقين
  مساحة المثلث = طول الضلع $\times \frac{\sqrt{3}}{4}$

تدرب وحل التمرينات

7) جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها $8cm$ وارتفاعه الجانبي $7.2cm$.

الحل : $\ell = 7.2\ cm$, $L = 8\ cm$

محيط المربع $P = 4 \times L = 4 \times 8 = 32\ cm$

المساحة الجانبية $LA = \frac{1}{2}p \times \ell \Rightarrow LA = \frac{1}{2}(32) \times 7.2 = 16 \times 7.2 = 115.2\ cm^2$

8) جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته المضلع الثماني المنتظم الذي قياس طول ضلعه 1.16 cm وارتفاعه الجانبي $2\ cm$.

الحل : $n = 8$, $H = 2\ cm$, $L = 1.16\ cm$

$A = \frac{1}{2}L \times H \times n \Rightarrow A = \frac{1}{2}(1.16) \times 2 \times 8$

المساحة الجانبية $A = 1.16 \times 8 = 9.28\ cm^2$

9) جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لمخروط دائري قائم قطر قاعدته $35\ m$ وارتفاعه الجانبي $20\ m$ واكتب الجواب بدلالة π .

الحل :

$\ell = 20\ m$, $r = \frac{35}{2} = 17.5\ m$

المساحة الجانبية $LA = \pi r \times \ell \Rightarrow LA = \pi \times 17.5 \times 20 = 700\pi\ m^2$

$TA = \pi r \times \ell + \pi r^2 \Rightarrow TA = 700\pi + \pi(17.5)^2 = 700\pi + 306.25\pi$

المساحة الكلية $TA = 9006.25\pi\ m^2$

10) جد حجم هرم قاعدته مثلث منتظم وطول ضلعه $6\ m$ وارتفاعه $13\ m$.

الحل : $h = 13\ m$, $L = 6\ m$

مساحة المثلث $P = \frac{1}{2} \times L \times h = \frac{1}{2} \times 6 \times 13 = 39\ m^2$

الحجم $V = \frac{1}{3}p \times \ell \Rightarrow V = \frac{1}{3}(39) \times 13 = 13 \times 13 = 169\ m^2$

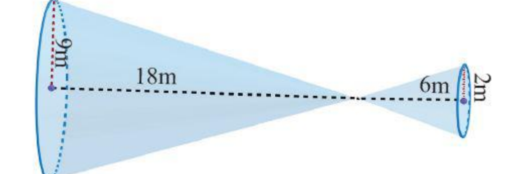
11) جد حجم الشكل المركب المجاور .

الحل : لايجاد حجم الشكل المركب نجد أولاً حجم المخروط الصغير وحجم المخروط الكبير وبعد ذلك نجمع الحجوم .

حجم المخروط الصغير $r = 2$, $h = 6$

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h \Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}\pi(2)^2 \times 6$

$V_1 = \frac{1}{3}(4)\pi \times 6 = 4\pi \times 2 = 8\pi\ cm^3$



حجم المخروط الكبير $r = 9$, $h = 18$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h \Longrightarrow V_2 = \frac{1}{3}\pi(9)^2 \times 18$$
$$V_2 = \frac{1}{3}(81)\pi \times 18 = 27\pi \times 18 = 486\pi\ cm^3$$
$$V = V_2 + V_1 = 8\pi + 486\pi = 494\pi\ cm^3$$

تدرب وحل مسائل حياتية

12) علوم : نموذج بركاني على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته $3\ cm$ اذا كان حجم النموذج $203\ cm^3$ تقريبا ، ما ارتفاعه ؟



الحل : $h = ?$, $V = 203$, $r = 3$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h \Longrightarrow 203 = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times h \Longrightarrow 203 = \frac{1}{3} \times 9\pi \times h$$
$$203 = 3\pi \times h \Longrightarrow 203 = 3 \times 3.14 \times h \Longrightarrow 203 = 9.42 \times h$$
$$h = \frac{203}{9.42} = \frac{20300}{942} = 21.55\ cm$$ ارتفاع النموذج البركاني

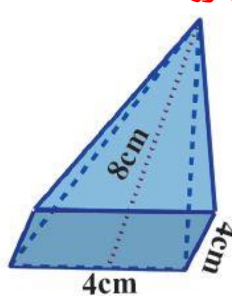
13) بناء : يبلغ ارتفاع برج العرب $321\ m$ ويمثل هرما مقوسا ، احسب المساحة التقريبية لقاعدته اذا كان حجم الهرم الذي يمثله $1904000\ m^3$.



الحل : $h = 321\ m$, $b = ?$, $V = 1904000\ m^3$

$$V = \frac{1}{3}b \times h \Longrightarrow 1904000 = \frac{1}{3}\ b \times 321$$
$$1904000 = b \times 107$$
$$b = \frac{1904000}{107} = 17794.4\ m^2$$ المساحة التقريبية

14) هندسة : جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل والمبين بالشكل المجاور .



الحل : $\ell = 8$, $L = 8$

$$P = 4 \times L \Longrightarrow P = 4 \times 4 = 16\ cm$$
$$LA = \frac{1}{2}p \times \ell \Longrightarrow LA = \frac{1}{2}(16) \times 8 = 8 \times 8 = 64\ cm^2$$ المساحة الجانبية

فكر

15) تحدٍّ: مخروط واسطوانة لهما نفس القاعدة والحجم، قطر الاسطوانة $40\ cm$ وارتفاعها $7\ cm$ ، ما المساحة الجانبية للمخروط ؟

الحل : $h = 7$, $r = \frac{40}{2} = 20$

حجم الاسطوانة $V = \pi r^2 \times h \Longrightarrow V = \pi(20)^2 \times 7 = 400\pi \times 7 = 2800\pi\ cm^3$

حجم الاسطوانة = حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h \Longrightarrow 2800\pi = \frac{1}{3}\pi(20)^2 \times h \Longrightarrow 8400\pi = 400\pi \times h$$

$$h = \frac{8400\pi}{400\pi} = 21\ cm$$

$$\ell^2 = h^2 + r^2 \Longrightarrow \ell^2 = (21)^2 + (20)^2 \Longrightarrow \ell^2 = 441 + 400 = 841$$

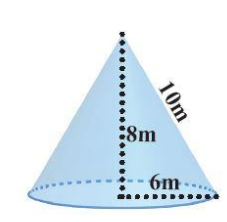
$$\ell^2 = 841 \xRightarrow{\text{بالجذر}} \ell = 29\ cm$$

$$LA = 2\pi r \times \ell \Longrightarrow LA = 2\pi(20)(29) = 1160\ cm^2$$

16) أكتشف الخطأ : اي الحلين خطأ ؟ وضح اجابتك

الحل :

$$r = 6\ cm \quad , \quad h = 8\ cm \quad , \quad \ell = 10\ cm$$



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h \Longrightarrow V = \frac{1}{3}\pi(6)^2 \times 8$$

الحل الاول خطأ $V = \frac{1}{3}\pi \times 36 \times 8 = 12\pi \times 8 = 96\,\pi\ cm^3$

أكتب : مسألة عن مضلع منتظم تسمح المعطيات فيه بأيجاد محيط المضلع ومساحته .

مسألة : جد محيط ومساحة الشكل التساعي المنتظم طول ضلعه $6\ cm$ وطول العائد $4\ cm$.

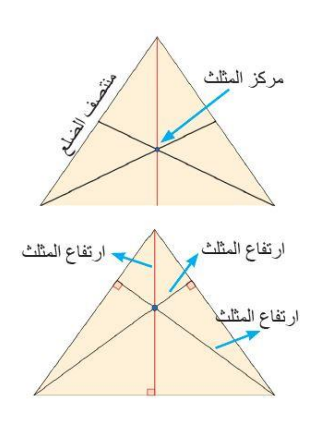
الحل : $L = 6 \quad , \quad H = 4 \quad , \quad n = 9$

المحيط $P = n \times L \Longrightarrow P = 9 \times 6 = 54\ cm$

المساحة $A = \frac{1}{2} L \times H \times n = \frac{1}{2}(6) \times 4 \times 9 = 3 \times 4 \times 9 = 108\ cm^2$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

المثلثات



تعرفت سابقا الى خواص المثلث وسنتعرف في هذا الدرس الى القطعة المتوسطة في مثلث : هي قطعة مستقيمة طرفاها احد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس، ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتقاطع في نقطة واحدة تسمى نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث (مركز المثلث) .

ارتفاع المثلث : هو العمود النازل من احد رؤوس المثلث على المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس ، ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات تتقاطع في نقطة واحدة تسمى (ملتقى الارتفاعات) .

فكرة الدرس :

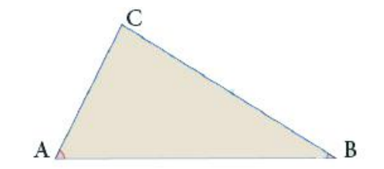
التعرف الى منصفات الزوايا والقطع المتوسطة للمثلث وكيفية تشابه مثلثين واستعمال التشابه في حل المسائل .

المفردات :

❖ المثلثان المتشابهان ❖ نسبة التشابه

الاضلاع والزوايا في المثلث

(مبرهنات بدون برهان) في كل مثلث:



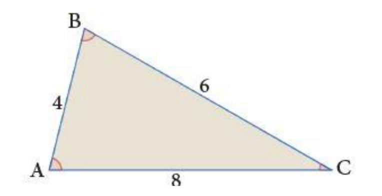
مبرهنة : اذا تباين ضلعا مثلث تباينت الزاويتان المقابلتان لهما ، فاكبرهما تقابل الضلع الاكبر وبالعكس . $BC > AC \Leftrightarrow m\angle C > m\angle B$

مثال : جد محيط ومساحة الشكل السداسي المنتظم ، طول ضلعه $4m$ وطول

i) في المثلث ادناه رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر

ii) في المثلث ادناه رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول واحسب قياس $\angle C$.

الحل :

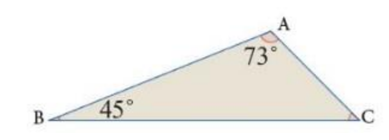


i) الضلع الاقصر $\overline{AB}$ اذن الزاوية الصغرى $\angle C$.

الضلع الاطول $\overline{AC}$ اذن الزاوية الكبرى $\angle B$.

الترتيب هو : $m\angle B , m\angle A , m\angle C$

ii) مجموع زوايا المثلث



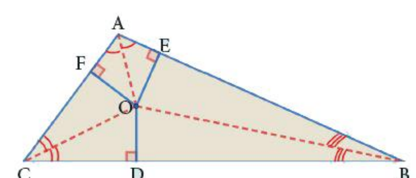
$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$$
$$73 + 45 + m\angle C = 180 \Longrightarrow 118 + m\angle C = 180$$
$$m\angle C = 180 - 118 = 62$$

الترتيب $\overline{AC} , \overline{AB} , \overline{BC}$

$$\therefore m\angle B < m\angle C < m\angle A$$



مبرهنة : منصفات زوايا المثلث تتلاقى بنقطة واحدة تكون متساوية الابعاد عن اضلاعه (والعكس صحيح) .



اذا كان $\overline{OC} , \overline{OB} , \overline{OA}$ منصفات الزوايا A , B , C على الترتيب ،

تلتقي في نقطة O ، فإن $OD = OE = OF$

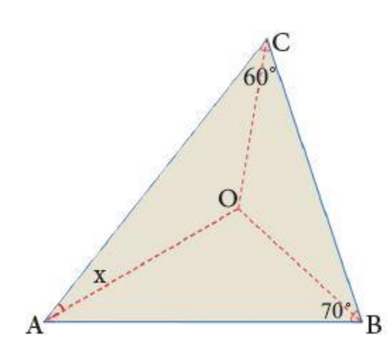
مثال : في المثلث المجاور جد قيمة x ، $\overline{BO}$ تنصف $\angle B$ ، $\overline{CO}$ تنصف $\angle C$.

الحل : $\therefore$ O نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث ABC ،



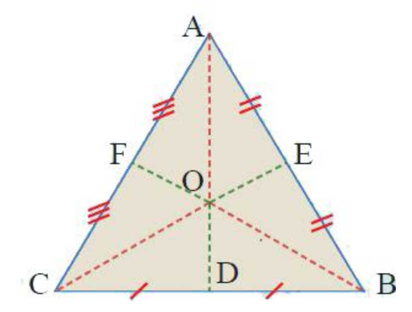
$x = \frac{1}{2}\angle A$ (AO تنصف $\angle A$)

مجموع زوايا المثلث



$$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$$
$$m\angle A + 70 + 60 = 180 \Longrightarrow m\angle A + 130 = 180$$
$$m\angle A = 180 - 130 = 50$$
$$x = \frac{1}{2}\angle A \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \times 50 = 25$$

مبرهنة : القطع المستقيمة المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة تسمى مركز ثقل المثلث ، تقسم كل منها بنسبة $\frac{2}{3}$ من جهة الرأس الى منتصف الضلع المقابل .

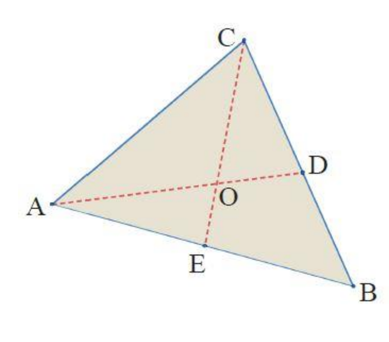


$$AO = \frac{2}{3}AD \quad , \quad BO = \frac{2}{3}BF \quad , \quad CO = \frac{2}{3}CE$$

$$OD = \frac{1}{3}AD \quad , \quad OF = \frac{1}{3}BF \quad , OE = \frac{1}{3}CE$$

مثال : المثلث ABC فيه $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في نقطة O ، $CE = 9$ cm ، $AD = 6$ cm . جد طول $\overline{AO}, \overline{OE}$.

الحل : $\overline{CE}$ قطعة متوسطة



$$OE = \frac{1}{3}CE$$

$$\therefore OE = \frac{1}{3} \times 9 = 3\ cm$$

$\overline{AD}$ قطعة متوسطة

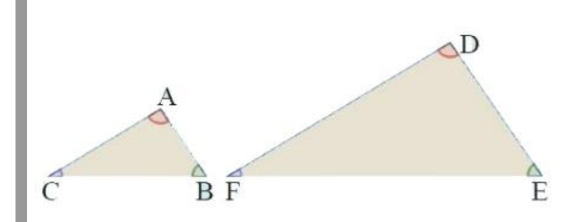
$$OA = \frac{2}{3}AD$$

$$\therefore OA = \frac{2}{3} \times 6 = 4\ cm$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

تشابه المثلثات :

المثلثان المتشابهان : هما مثلثان تتناسب اضلاعهما وتتطابق زواياهما ويرمز للتشابه بالرمز(~) .



مبرهنة : اذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فان المثلثين يتشابهان .

$$m\angle A = m\angle D \quad , \quad m\angle C = m\angle F$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

مبرهنة : اذا تناسب ثلاثة اضلاع من مثلث مع ثلاثة اضلاع من مثلث آخر فان المثلثين يتشابهان .

مثال : بين ما اذا كان المثلثين في الشكل المجاور متشابهان ، واكتب نسبة التشابه .

الحل :

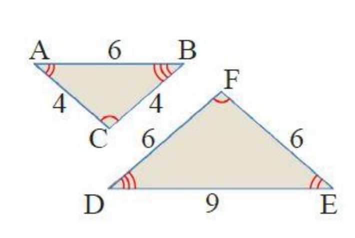
i)

$$\frac{AB}{DE} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AC}{EF} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{ED} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

∴ المثلثان متشابهان



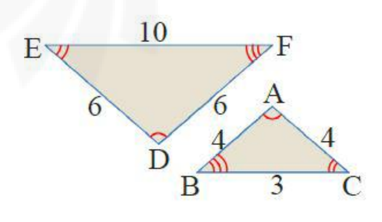
ii)

$$\frac{BC}{EF} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AB}{DF} = \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{BC}{EF} \neq \frac{AB}{DF}$$

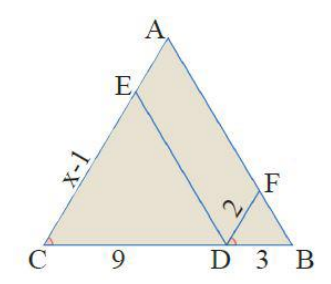
∴ المثلثان غير متشابهان



مبرهنة :اذا تناسب ضلعان في مثلث مع نظائرهما في مثلث آخر، وتطابقت الزاوية المحصورة بينهما مع نظيرتها فان المثلثين يتشابهان .

مثال : في الشكل المجاور : اذا كان $\frac{DF}{DB} = \frac{EC}{CD}$ ، $m\angle C = m\angle FDB$ جد قيمة x .

الحل : بما ان المثلثين BFD , DEC متشابهان ، اذن اضلاعهما المتناظرة متناسبة .



$$\frac{CE}{DF} = \frac{CD}{DB}$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{9}{3} \Rightarrow 3x - 3 = 18 \Rightarrow 3x = 18 + 3 \Rightarrow 3x = 21$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{21}{3} \Rightarrow x = 7$$

تأكد من فهمك

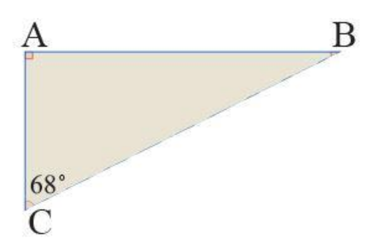
رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول :

1) $m\angle A = 90$ قائمة

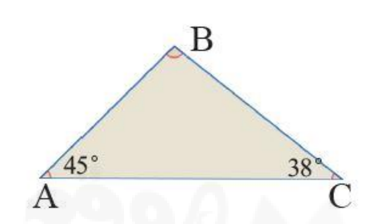
مجموع زوايا المثلث

$$m\angle A + m\angle C + m\angle B = 180$$
$$90 + 68 + m\angle B = 180$$
$$158 + m\angle B = 180$$
$$m\angle B = 180 - 158 = 22$$

الترتيب $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$



2) واجب



رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر

3)

الضلع الاقصر هو AB اذن الزاوية الصغرى $\angle C$

الضلع الاطول هو BC اذن الزاوية الكبرى $\angle A$

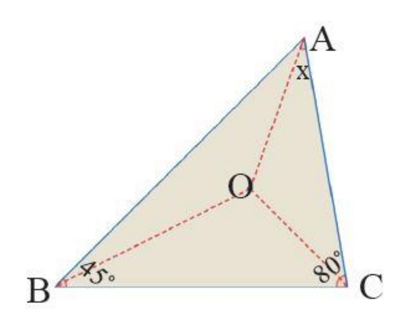
الترتيب $\angle C$, $\angle B$, $\angle A$

4) واجب



5) في المثلث المجاور اذا كان $\overline{CO}$, $\overline{BO}$, $\overline{AO}$ منصفات الزوايا C , B , A جد $x\angle A$.

الحل : ∴ O نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث ABC ،



$x = \frac{1}{2}\angle A \quad (AO \text{ تنصف } \angle A)$

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180$

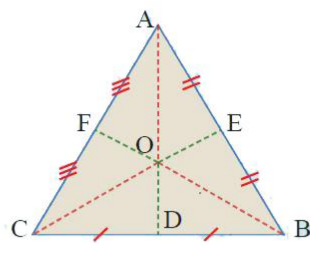
$m\angle A + 80 + 45 = 180 \Longrightarrow m\angle A + 125 = 180$

$m\angle A = 180 - 125 = 55$

$x = \frac{1}{2}\angle A \Longrightarrow x = \frac{1}{2} \times 55 = 27.5$

6) ABC مثلث ، O نقطة تقاطع مستقيماته المتوسطة اذا كان $BO = 12$ جد طول القطعة المستقيمة التي احد طرفيها التقطة B .

الحل : BF القطعة المتوسطة



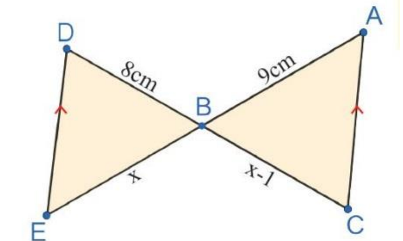
$BO = \frac{2}{3}BF$

$12 = \frac{2}{3}BF \Longrightarrow 36 = 2BF \Longrightarrow \frac{36}{2} = \frac{2BF}{2} \Longrightarrow BF = 18$

7) في المثلث ABC ، O نقطة التقاء القطع المتوسطة جد طول $\overline{AD}$ اذا علمت ان : واجب

$\angle COB = 90 \quad , \quad \overline{AO} \cap \overline{BC} = \{D\} \quad , \quad BC = 6cm$

8) في الشكل المجاور :



i) بين ان المثلثين BDE , ABC متشابهان .

ii) جد نسبة التشابه . واجب

iii) جد قيمة x . واجب

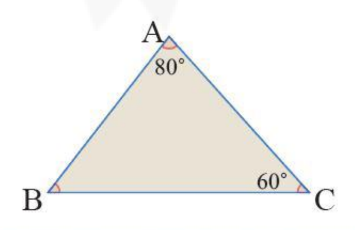
الحل :

$i) \ m\angle A = m\angle E \quad , \quad m\angle C = m\angle D \quad , \quad m\angle ABC = m\angle DBE$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta BDE$ لان زواياه متطابقة

تدرب وحل التمرينات

رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول :



9)

$m\angle A + m\angle C + m\angle B = 180$

$80 + 60 + m\angle B = 180$

$140 + m\angle B = 180 \Longrightarrow m\angle B = 180 - 140 = 40$

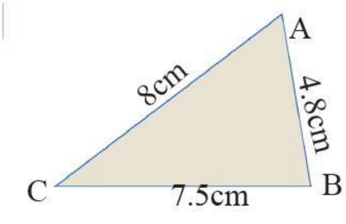
الترتيب $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$

10) واجب



11)

رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر

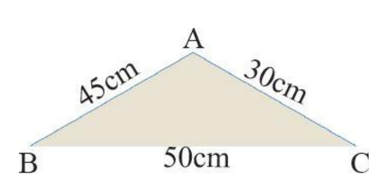


الضلع الاقصر هو AB اذن الزاوية الصغرى $\angle C$

الضلع الاطول هو AC اذن الزاوية الكبرى $\angle B$

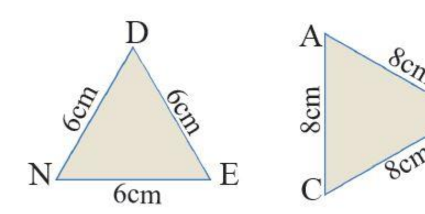
الترتيب $\angle C , \angle A , \angle B$

12) واجب



13) بين ان المثلثين ABC , DNE في الشكل المجاور متشابهان وأكتب نسبة التشابه ثم سم ازواج الزوايا المتطابقة .

الحل :



$$\frac{AC}{DN} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{AB}{DE} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$
$$\frac{BC}{NE} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$m\angle A = m\angle D \quad , \quad m\angle B = m\angle E \quad , \quad m\angle C = m\angle N$$

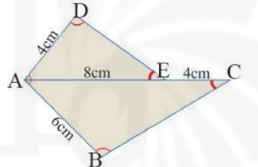
$\therefore$ المثلثان متشابهان

13) بين ان المثلثين ABC , ADE في الشكل المجاور متشابهان وأكتب نسبة التشابه ثم بين أن : $m\angle B \cong m\angle D$

الحل :

$$\therefore AC = 8 + 4 = 12$$





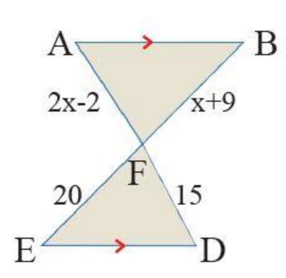
$$\frac{AD}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{AE}{AC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ المثلثان متشابهان

تدرب وحل مسائل حياتية

15) هندسة : اذا علمت ان $\Delta ABF \sim \Delta DEF$ وان $\overline{AB}//\overline{ED}$ استعمل المعلومات في الشكل المجاور لتجد قيمة x .

الحل :



$$\frac{EF}{FB}=\frac{DF}{FA}$$

$$\frac{20}{x+9}=\frac{15}{2x-2} \Longrightarrow 40x-40=15x+135$$

$$40x-15x=135+40 \Longrightarrow 25x=175$$

$$\frac{25x}{25}=\frac{175}{25} \Longrightarrow x=7$$

16) بناية : ارتفاعها يمثل بضلع مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور . و BE هو ارتفاع للمثلث ABD برهن أن :

i) $\angle EBA \cong \angle D$ ii) $\Delta ABE \sim \Delta DBE$

الحل :

$$i)\ BE=\frac{1}{2}AD$$

$$BE=\frac{1}{2}(120)=60$$

$\therefore\ \Delta EBD$ متساوي الساقين

$\angle E=90 \Longrightarrow \angle B=\angle A=45$

$\angle B=\angle D=45$ $\therefore\ \angle EBA \cong \angle D=45°$

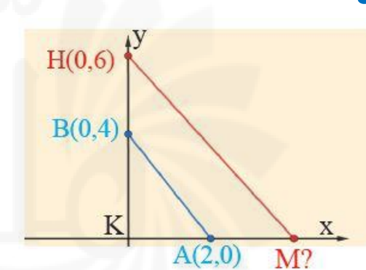
$ii)\ AE=BE=60$

$BE=ED=60$ $\therefore\ AB=BD$

$\therefore \Delta ABE \sim \Delta DBE$


16) في الشكل المجاور المثلثان KAB , KMH متشابهان ، جد احداثي M ونسبة التشابه .


الحل :



$$\frac{KB}{KH}=\frac{KA}{KM}$$

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{KM} \Longrightarrow 4(KM)=12 \Longrightarrow \frac{4(KM)}{4}=\frac{12}{4}$$

$KM=3 \quad \therefore \quad M(3,0)$

فكر

18) اكتشف : ما طول $\overline{AB}$ في الرسم المجاور؟ علما ان $\Delta ECD \sim \Delta ABF$.

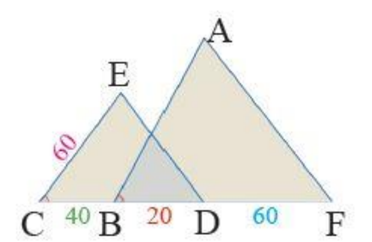
الحل :

$$\frac{EC}{AB}=\frac{CD}{BF} \Longrightarrow \frac{60}{AB}=\frac{60}{80} \Longrightarrow \frac{60}{AB}=\frac{3}{4} \Longrightarrow 3\,(AB)=240 \Longrightarrow \frac{3\,(AB)}{3}=\frac{240}{3}$$



$AB = 80$

$\therefore\ \Delta ECD \sim \Delta ABF$



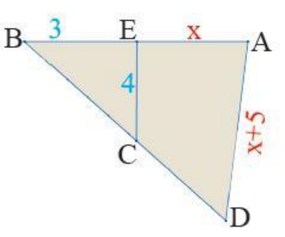
19) تحد : $(2\ ,5\ ,10)$ ، $(6\ ,15\ ,x)$ هي اطوال اضلاع متناظرة في مثلثين ، ما قيمة x ؟

الحل :

$$\frac{x}{10} = \frac{15}{5} \Rightarrow 5x = 150 \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{150}{5} \Rightarrow x = 30$$

20) حس عددي : جد قيمة x في الشكل المجاور . اذا كان المثلثان $EBC\ ,ABD$ متشابهان وان : $\overline{EC}//\overline{AD}$

الحل : $(AB = x + 3)$



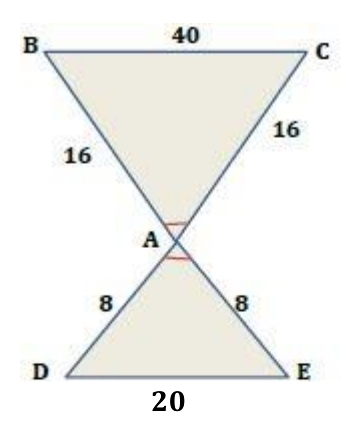
$$\frac{AD}{EC} = \frac{AB}{BE} \Rightarrow \frac{x+5}{4} = \frac{x+3}{3} \Rightarrow 4x + 12 = 3x + 15$$

$$4x - 3x = 15 - 12 \Rightarrow x = 3$$

21) مسألة مفتوحة : اشرح لماذا تحتاج قياسات الزوايا للتأكد من تشابه المثلثات ، اعط مثلاً على ذلك .

أكتب : مسألة عن مثلثين متساويي الساقين تتطابق فيهما زاويتا الرأس وجد نسبة التشابه .

الحل :



$$\frac{AD}{AC} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DE}{BC} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

التناسب والقياس في المثلثات



تعلم : تتضمن مخططات المدن والشوارع في تطبيق الخرائط في الاجهزة الالكترونية خطوطاًمتوازية واخرى متعامدة، فالمخطط الجانبي يمثل جزءاً من مدينة بغداد ونلاحظ فيه الشوارع متوازية ومتعامدة .

فكرة الدرس :

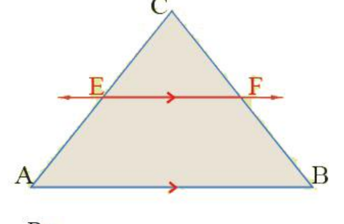
- استعمل الاجزاء المتناسبة في المثلثات لنبرهن توازي مستقيمين او اكثر .
- استعمل التناسب لاجد قياسات مجهولة .
- استعمل التناسب الهندسي في المستوى الاحداثي .

المفردات : التناسب الهندسي

التناسب في المثلثات

مبرهنة التناسب المثلثي :

المبرهنة : اذا وازى مستقيم ضلعا من اضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين مختلفتين فإنه يقسم الضلعين الى قطع متناسبة الاطوال (بدون برهان) .

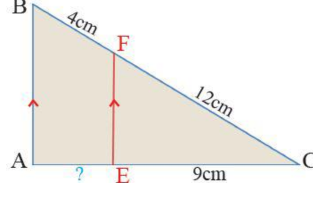


المعطى : $\overline{AB} \,//\, \overline{EF}$

النتيجة : $\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$

مثال : جد طول قطعة المستقيم AE علما ان : $\overline{AB} \,//\, \overline{EF}$ في الشكل المجاور .

الحل :



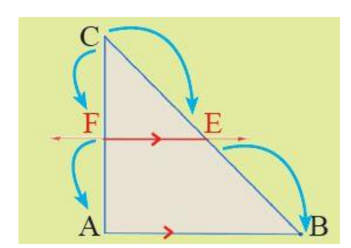
$$\frac{CE}{AE} = \frac{CF}{FB}$$

$$\frac{9}{EA} = \frac{12}{4} \Rightarrow 12(AE) = 36 \Rightarrow \frac{12(AE)}{12} = \frac{36}{12} \Rightarrow AE = 3$$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

عكس مبرهنة التناسب المثلثي

المبرهنة :اذا قسم مستقيم ضلعين في مثلث الى قطع متناسبة فإنه يكون موازيا للضلع الثالث (بدون برهان) .

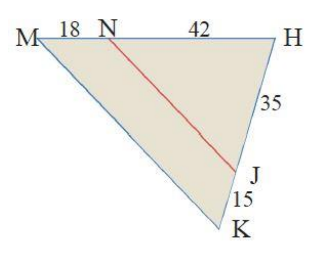


المعطى : $\frac{CE}{EB} = \frac{CF}{FA}$

النتيجة : $\overline{AB} \,//\, \overline{EF}$

مثال : في الشكل المجاور برهن أن : $\overline{MK} \,//\, \overline{NJ}$

الحل :



$$\frac{HJ}{JK} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3} \quad , \quad \frac{HN}{NM} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore \frac{HJ}{JK} = \frac{HN}{NM} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore \overline{MK} \,//\, \overline{NJ}$$

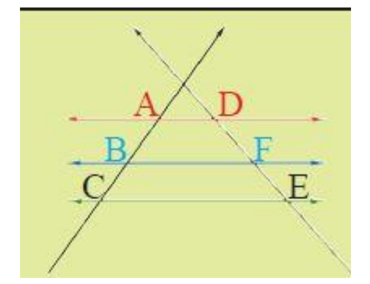
❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

مبرهنة طالس

المبرهنة : اذا قطعت ثلاثة مستقيمات متوازية او اكثر بمستقيمين فإن القطع المحددة بالمستقيمات المتوازية تكون متناسبة .

المعطى : $\overleftrightarrow{AD} \,//\, \overleftrightarrow{BF} \,//\, \overleftrightarrow{CF}$

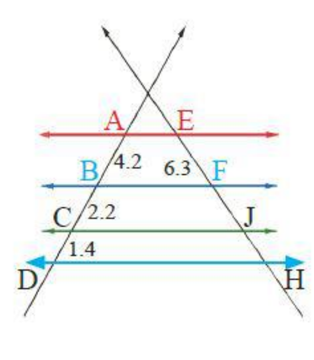
النتيجة : $\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{FE}$





مثال : استعمل مهندس الرسم المنظوري (هو رسم الاجسام البعيدة بحيث تبدو اصغر والاجسام القريبة حيث تبدو اكبر ، مع الحفاظ على هيئتها وتناسب مقاييسها لتبدو ثلاثية الابعاد) ليرسم خطوطاً اولية تساعده على رسم اعمدة اتصالات متوازية، تحقق من رسمه بقياس المسافات بين الاعمدة، كم طول $\overline{FH}$ ؟

الحل :



$$\overline{MK} // \overline{NJ} // \overline{CJ} // \overline{DH}$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{EF}{FH}$$

$$BD = BC + CD = 2.2 + 1.4 = 3.6\ m$$

$$\frac{4.2}{3.6} = \frac{6.3}{FH} \Rightarrow 4.2\ (FH) = 6.3 \times 3.6 \Rightarrow FH = \frac{6.3 \times 3.6}{4.2}$$

$$FH = \frac{22.68}{4.2} = 5.4\ m$$

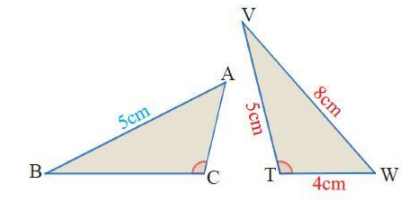
❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

التناسب والقياس : لايجاد نسبة المحيطين ونسبة المساحتين لمثلثان متشابهان، يمكنني استعمال المبرهنة التالية (بدون برهان) .

مبرهنة : اذا تشابه مثلثان بنسبة تشابه $\frac{a}{b}$ فإن نسبة المحيطين للمثلثين تساوي $\frac{a}{b}$ ونسبة المساحتين للمثلثين $\frac{a^2}{b^2}$

❖ اذا كان المثلثان متشابهين ، فإن النسبة بين محيطيهما تساوي النسبة بين اطوال الاضلاع المتناظرة .

مثال : ليكن $\Delta WVT \sim \Delta ABC$ جد محيط ΔABC



الحل : P_1 محيط المثلث WVT P_2 محيط المثلث ABC

$$P_1 = 8 + 5 + 4 = 17\ cm$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{AB}{WV} \Rightarrow \frac{P_2}{17} = \frac{5}{8} \Rightarrow (8)P_2 = 17 \times 5$$

$$P_2 = \frac{17 \times 5}{8} = \frac{85}{8} = 10.625$$ محيط المثلث ABC

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

التناسب الهندسي احداثيا

التناسب الهندسي : هو تحويل يغير مقاييس الاشكال الهندسية دون تغيير هيئتها فالشكل وصورته بالتناسب الهندسي يكونان دائما متشابهين ، مركز التناسب هو نقطة الاصل .

سنقتصر دراسة التناسب الهندسي في هذا الدرس على المستوي الاحداثي، اذا تعاملت مع تناسب هندسي معامله الهندسي M فسوف يكون بامكانك ان تجد صورة النقطة بضرب احداثياتها في M $(x , y) \longrightarrow (Mx , My)$

مثال : يبين الرسم المجاور موقع صورة على شبكة الانترنيت، ارسم حدود الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته $\frac{5}{3}$

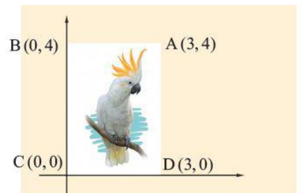
الحل : نقوم بضرب معامل التناسب الهندسي في احداثيات الرؤوس .

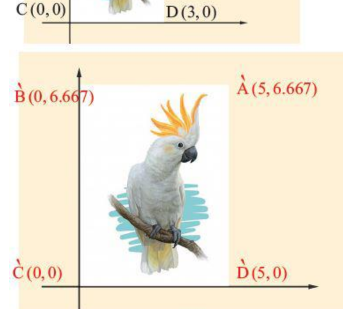
$$A(3,4) \to \acute{A}\left(\frac{5}{3}\times 3,\frac{5}{3}\times 4\right) \to \acute{A}\left(5,\frac{20}{3}\right)$$

$$B(0,4) \to \acute{B}\left(\frac{5}{3}\times 0,\frac{5}{3}\times 4\right) \to \acute{B}\left(0,\frac{20}{3}\right)$$

$$C(0,0) \to \acute{C}\left(\frac{5}{3}\times 0,\frac{5}{3}\times 0\right) \to \acute{C}(0,0)$$

$$D(3,0) \to \acute{D}\left(\frac{5}{3}\times 3,\frac{5}{3}\times 0\right) \to \acute{D}(5,0)$$

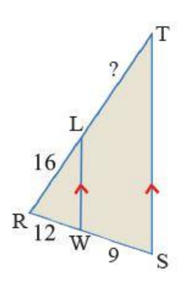




نقوم بتمثيل النقاط الاصلية $A\ B\ C\ D$ في المستوى الاحداثي فيظهر الشكل الاول وبعد ادخال عامل التناسب على النقاط تظهر نقاط جديدة $\acute{A}\ \acute{B}\ \acute{C}\ \acute{D}$ فنمثلها في المستوى الاحداثي ليظهر الشكل الثاني .

تأكد من فهمك

جد طول القطعة المستقيمة المجهولة في الاشكال الاتية :

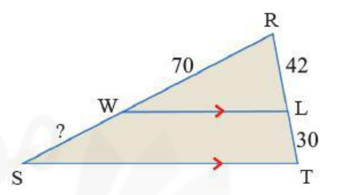


$$1)\ \frac{RL}{LT} = \frac{RW}{WS}$$

$$\frac{16}{LT} = \frac{12}{9} \Longrightarrow 12(LT) = 16\times 9 \Longrightarrow \frac{12(LT)}{12} = \frac{144}{12} \Longrightarrow LT = 12$$

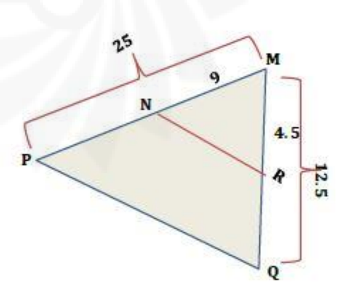
مبرهنة التناسب المثلثي

2) واجب (مبرهنة التناسب المثلثي)



3) في المثلث MQP , $MQ = 12.5$ ، $MR = 4.5$ ، $MP = 25$ ، $MN = 9$ هل $RN//QP$ أو لا ؟ برر اجابتك حيث $N \in MP\ , R \in MQ$.

الحل :



$$RQ = MQ - MR = 12.5 - 4.5 = 8$$

$$\frac{MR}{RQ} = \frac{4.5}{8} = \frac{45}{80} = \frac{9}{16}$$

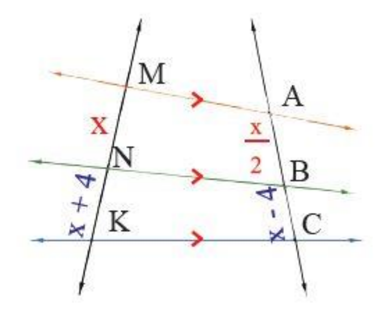
$$NP = MP - MN = 25 - 9 = 16$$

$$\frac{MN}{NP} = \frac{9}{16}\ , \qquad \therefore \frac{MR}{RQ} = \frac{MN}{NP} = \frac{9}{16}$$

عكس مبرهنة التناسب المثلثي

4) في الرسم المجاور جد طول $\overline{KN}$, $\overline{MN}$

الحل :



$$\frac{MN}{NK} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{x}{x+4} = \frac{\frac{x}{2}}{x-4} \Rightarrow x(x-4) = \frac{x}{2}(x+4$$

$$x^2 - 4x = \frac{x^2}{2} + \frac{4x}{2} \Rightarrow [x^2 - 4x = \frac{x^2}{2} + 2x] \times 2$$

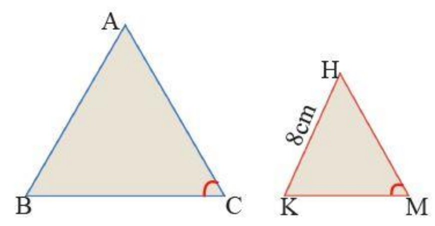
$$2x^2 - 8x = 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + 4x \Rightarrow 2x^2 - 8x = x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - x^2 - 8x - 4x = 0$$

$$x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(x-12) = 0$$

أما $x = 0$ تهمل , أو $x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12$

$MN = x = 12$, $KN = x + 4 = 12 + 4 = 16$

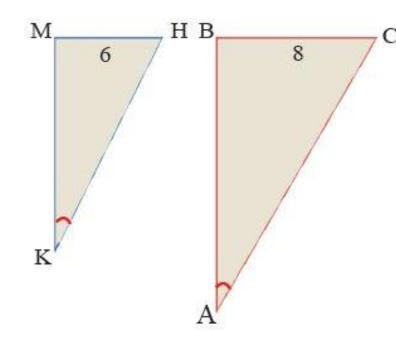
5) المثلثان KMH , ABC متشابهان ، مساحة ΔABC ضعف مساحة ΔKMH ، ما طول $\overline{AB}$ ؟ واجب



6) المثلثان KMH , ABC متشابهان ، جد مساحة ومحيط المثلث ABC علما ان محيط المثلث KMH ، يساوي $18\ cm$ ومساحته $15\ cm^2$.

الحل : نفرض A_1 مساحة المثلث KMH

نفرض A_2 مساحة المثلث ABC



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(MH)^2}{(AB)^2} \Rightarrow \frac{15}{A_2} = \frac{(6)^2}{(8)^2} \Rightarrow \frac{15}{A_2} = \frac{36}{64}$$

$$\frac{15}{A_2} = \frac{9}{16} \Rightarrow A_2 \times 9 = 15 \times 16 \Rightarrow A_2 = \frac{15 \times 16}{9}$$

$A_2 = \frac{80}{3} = 26.6\ cm^2$ مساحة المثلث ABC

نفرض P_1 محيط المثلث KMH ، نفرض P_2 محيط المثلث ABC

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{MH}{AB} \Rightarrow \frac{8}{P_2} = \frac{6}{8} \Rightarrow P_2 \times 6 = 8 \times 8$$

$P_2 = \frac{64}{6} = 10.4\ cm$ محيط المثلث ABC

7) ABC مثلث حيث $A(6\,,0)\,,B\left(-3\,,\frac{3}{2}\right)\,,C(3\,,-6)$ جد صورته بعد تصغيره بمعامل $\frac{1}{3}$ ، علما ان مركزه هو نقطة الاصل .

الحل : نقوم بضرب معامل التناسب الهندسي في احداثيات الرؤوس .

$$A(6,0) \longrightarrow \acute{A}\left(\frac{1}{3} \times 6\,, \frac{1}{3} \times 0\right) \longrightarrow \acute{A}(2\,,0)$$

$B\left(-3\,,\frac{3}{2}\right) \longrightarrow \acute{B}(\frac{1}{3}\times -3\,,\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}) \longrightarrow \acute{B}(-1\,,\frac{1}{2})$

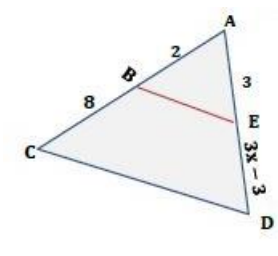
$C(3\,,-6) \longrightarrow \acute{C}(\frac{1}{3}\times 3\,,\frac{1}{3}\times -6) \longrightarrow \acute{C}(1\,,-2)$

تدرب وحل التمرينات

8) في المثلث ACD ، $\overline{BE}//\overline{CD}$ جد قيمة x و $\overline{ED}$ اذا كان :

$ED = 3x - 3\,, BC = 8\,, AE = 3\,, AB = 2$

الحل :



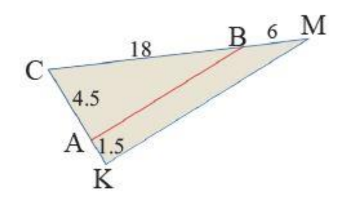
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{ED} \Longrightarrow \frac{2}{8} = \frac{3}{3x-3}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{3x-3} \Longrightarrow 3x - 3 = 12 \Longrightarrow 3x = 12 + 3$$

$$3x = 15 \Longrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{15}{3} \Longrightarrow x = 5$$

$$ED = 3x - 3 = 3(5) - 3 = 15 - 3 = 12$$

9) حدد ما اذا كان $\overline{AB}//\overline{MK}$ في الشكل المجاور . واجب



10) نسبة مساحة المثلث ABC الى نسبة مساحة المثلثKMH تساوي $\frac{16}{25}$ ما نسبة تشابه المثلثين وما النسبة التشابه بين محيطيهما ؟

الحل : نسبة التشابه للمساحتين $= \frac{a^2}{b^2}$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{16}{25} \xRightarrow{\text{بالجذر}} \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{16}{25}} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$

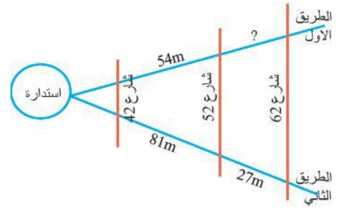
∴ نسبة التشابه بين محيطيهما $= \frac{a}{b}$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$$

11) جد صورة المثلث ABC حيث : $A(-1\,,-1)\,, B(1,-2)\,, C(1\,,2)$ تحت تأثير تناسب معامله 2 . واجب

تدرب وحل مسائل حياتية

12)طرق : تمثل الخريطة المجاورة بعض الشوارع المتوازية وطريقين عبرها، ما طول الطريق الاول بين الشارع 62 والشارع 52 ؟ واجب



13) هندسة : جد صورة الشكل الرباعي حيث : $A(2,6), B(-4,0), C(-4,-8), D(-2,-12)$ تحت تأثير تناسب معامله $\frac{1}{4}$.

الحل :

$$A(2,6) \longrightarrow \acute{A}\left(\frac{1}{4}\times 2, \frac{1}{4}\times 6\right) \longrightarrow \acute{A}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$B(-4,0) \longrightarrow \acute{B}\left(\frac{1}{4}\times -4, \frac{1}{4}\times 0\right) \longrightarrow \acute{B}(-1,0)$$

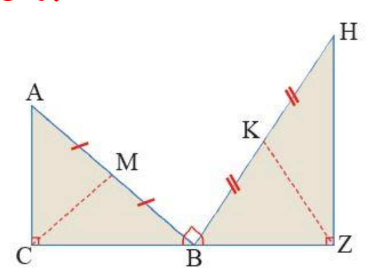
$$C(-4,-8) \longrightarrow \acute{C}\left(\frac{1}{4}\times -4, \frac{1}{4}\times -8\right) \longrightarrow \acute{C}(-1,-2)$$

$$D(-2,-12) \longrightarrow \acute{D}\left(\frac{1}{4}\times -2, \frac{1}{4}\times -12\right) \longrightarrow \acute{D}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$$

فكر

اذا علمت ان طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة الى منتصف الوتر تساوي نصف . طول الوتر اجب عن السؤال 14 .

14) تحد : في الرسم المجاور M منتصف $\overline{AB}$ و K منتصف $\overline{HB}$ ، الزوايا $\angle C, \angle ABH, \angle Z$ قائمة ، برهن أن $\frac{(BZ)^2+(ZH)^2}{(BC)^2+(CA)^2} = \left(\frac{KZ}{CM}\right)$.



الحل : نفرض مساحة $A_1 = \Delta BZH$

نفرض مساحة $A_2 = \Delta ABC$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

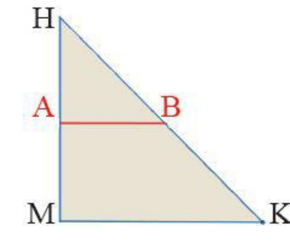
المثلث KHZ, KZB متساوي الساقين فيه $KZ = HZ, KZ = BZ$

المثلث MCB, ACM متساوي الساقين فيه $CM = AC, CM = BC$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{1}{2}\times BZ \times HZ}{\frac{1}{2}\times BC\times AC} = \frac{KZ\times KZ}{CM\times CM} = \frac{(KZ)^2}{(CM)^2} = \left(\frac{KZ}{CM}\right)^2$$

أكتب : ما تستطيع من تناسبات اذا علمت ان $\overline{MK}//\overline{AB}$ في الشكل المجاور .

الحل :

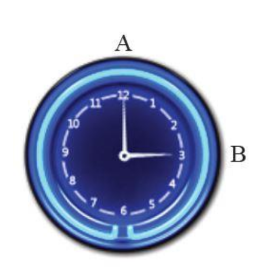


$$\frac{HA}{AM} = \frac{HB}{BK}$$

$\therefore \overline{MK}//\overline{AB}$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

الدائرة



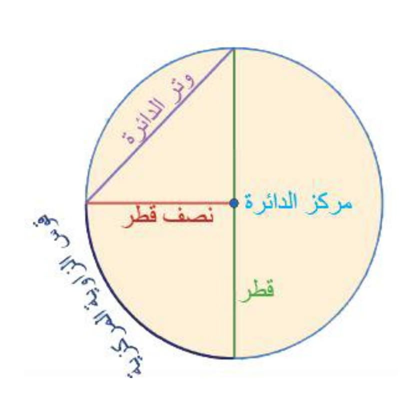
تعلم : كل زاوية بين عقربي ساعة هي زاوية مركزية والزاوية المركزية هي الزاوية التي تقطع الدائرة في نقطتين ورأسها هو مركز الدائرة وكل زاوية مركزية في دائرة يقابلها قوس على الدائرة يسمى قوس الزاوية، ما قياس $\widehat{AB}$ المقابل $\angle AOB$ ؟ وهل هناك عدة انواع من الاقواس .

فكرة الدرس :

- ❖ اجد قياس الاقواس والزوايا المركزية للدوائر .
- ❖ أتعرف الى المماس والمماس المشترك

المفردات :

- القوس ، الوتر .
- المماس ، المماس المشترك .
- الزوايا المركزية .

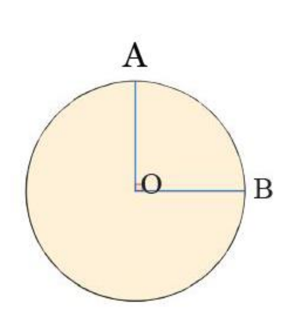


تعرفت سابقا مفهوم الدائرة : وهي مجموعة من النقاط المتصلة في المستوي والتي لها البعد نفسه عن نقطة ثابتة تسمى مركز الدائرة ، ونصف قطر الدائرة r : هو قطعة مستقيمة تصل بين مركز الدائرة ونقطة على الدائرة،

وتر الدائرة : هو قطعة مستقيمة طرفاها على الدائرة .

قطر الدائرة : هو وتر يمر بمركز الدائرة.

وسوف تزيد معلوماتك عن الدائرة في هذا الدرس لتتعرف الى القوس وقياسه بدلالة الزاوية المركزية المقابلة له.



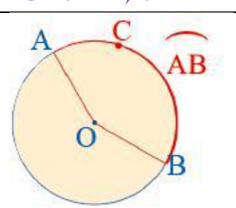
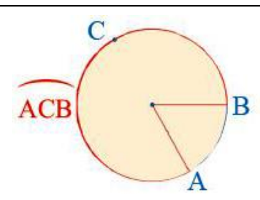
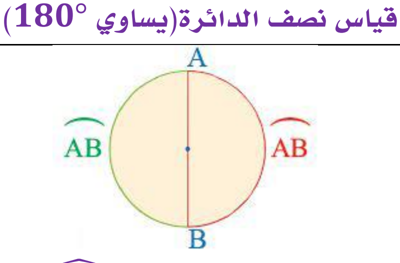
مثال : كيف اجد قياس القوس $\widehat{AB}$ بدلالة الزاوية المركزية المقابلة له ؟



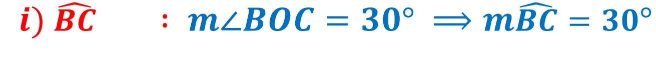
الحل : قياس الزاوية المركزية يكافئ قياس القوس المقابل لها ويرمز للقوس $\widehat{AB}$

الزاوية AOB زاوية قائمة $\quad m\,\angle AOB = 90°$

$\therefore$ قياس القوس المقابل للزاوية AOB يساوي $m\,\widehat{AB} = 90°$

القوس الاصغر (أصغر من $180°$)	القوس الأكبر (أكبر من $180°$)	قياس نصف الدائرة(يساوي $180°$)
		
$m\,\widehat{AB} = m\angle AOB < 180$	$m\,\widehat{AB} = m\angle AOB > 180$	$m\,\widehat{AB} = m\angle AOB = 180$

مثال : جد قياس الزوايا والاقواس المجهولة في الشكل المجاور :



$i)\ \widehat{BC} \quad : m\angle BOC = 30° \Longrightarrow m\widehat{BC} = 30°$

$ii)\ \widehat{DC} \quad : m\angle COB = 90° \Longrightarrow m\widehat{DC} = 90°$

$iii)\ \widehat{BCD} : m\angle BOC + m\angle COD = 30° + 90° = 120°$

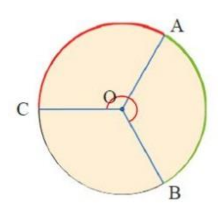
$m\widehat{BCD} = 120°$

$iv)\ \widehat{BEA} : m\angle BOA = 180° \Longrightarrow m\widehat{BEA} = 120°$

$v)\ \widehat{AD} \quad : m\angle AOD = 180° - 120° = 60° \Longrightarrow m\widehat{AD} = 60°$

مثال : الدائرة المقابلة مقسمة الى ثلاثة اجزاء متطابقة، جد قياس الاقواس الآتية: $\widehat{AB}$, $\widehat{ABC}$.

الحل : هناك ثلاث زوايا مركزية متطابقة مجموعها $360°$



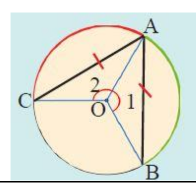
$i)\ \ \widehat{AB} \quad : m\angle AOB = \dfrac{360}{3} = 120° \Longrightarrow \widehat{AB} = 120°$

$ii)\ \widehat{ABC} \ : m\angle ABC = 120° + 120° = 240° \Longrightarrow \widehat{ABC} = 240°$

طريقة ثانية :

$ii)\ \widehat{ABC} \ : \widehat{ABC} = 360° - \widehat{AB} = 360° - 120° = 240°$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖



لاحظ المثلثين والزاويتين المركزيتين $1, 2$ والقوسين $\widehat{AB}$, $\widehat{CA}$ والوترين $\overline{AB}$, $\overline{CA}$ اذا تطابقت الزاويتان تطابق القوسان وتطابق المثلثان فيتطابق الوتران $\overline{AB}$, $\overline{CA}$ ويمكنك ان تستعمل مثل هذه الطريقة للتوصل الى المبرهنة التالية (بدون برهان) :

مبرهنة الاقواس والاوتار والزاوية المركزية، في كل دائرة او في دائرتين متطابقتين	
• اذا تطابقت زاويتان مركزيتان تطابق وتراها وبالعكس .	$\angle 1 \cong \angle 2 \Longleftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{AC}$
• اذا تطابقت زاويتان مركزيتان تطابق قوساهما وبالعكس .	$\angle 1 \cong \angle 2 \Longleftrightarrow \widehat{AB} \cong \widehat{AC}$
• اذا تطابقت قوسان تطابق وتراهما وبالعكس .	$\overline{AB} \cong \overline{AC} \Longleftrightarrow \widehat{AB} \cong \widehat{AC}$

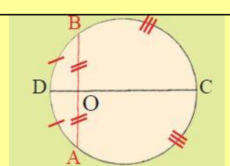
مثال : استعمل مبرهنة الاقواس والاوتار لتبرهن ان المثلث ABC متساوٍ

الحل : الاضلاع في الدائرة المقابلة علما ان $\widehat{AB} \cong \widehat{AC} \cong \widehat{CB}$

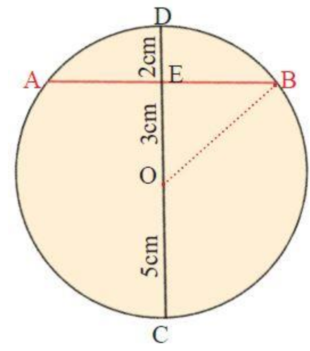
$\because\ \widehat{AB} \cong \widehat{AC} \cong \widehat{CB}$

$\therefore\ \overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{CB}$ (مبرهنة الاقواس والاوتار)

لذا فإن المثلث ABC متساوي الاضلاع

مبرهنة القطر العمودي ، في كل دائرة	
مبرهنة :القطر العمودي على وتر في دائرة ينصف الوتر وينصف كلا قوسيه $CD \perp AB \rightarrow AO = BO \ , \ \widehat{AD} \cong \widehat{DB} \ , \ \widehat{BC} \cong \widehat{AC}$	

مثال : استعمل مبرهنة القطر العمودي وجد طول الوتر AB اذا علمت ان نصف القطر OD يساوي $5\ cm$. وإن $DE = 2\ cm$.



الحل :

أولاً : نقوم برسم نصف القطر $\overline{OD}$

$DE = 2\ cm \quad , \quad OC = OD = 5\ cm$

$OB = 5\ cm \quad , \quad OE = 5 - 2 = 3\ cm$

ثانيا : مستخدم مبرهنة فيثاغورس $(OB)^2 = (OE)^2 + (EB)^2$

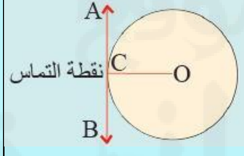
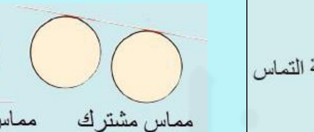
$(5)^2 = (3)^2 + (EB)^2 \Longrightarrow (EB)^2 = 25 - 9 = 16$

$(EB)^2 = 16 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} EB = 4\ cm$

$\therefore AB = 4 \times 2 = 8\ cm$

E منتصف AB مبرهنة القطر العمودي ، القطر $\overline{CD}$ عمودي على الوتر $\overline{AB}$ وينصفه .

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

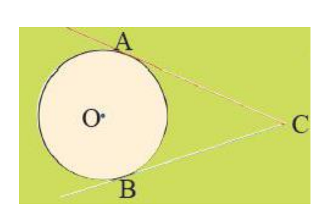
المماس	
مماس الدائرة : هو المستقيم الذي يلاقي الدائرة في نقطة واحدة تعرف بنقطة التماس ويكون عموديا على نصف القطر في نقطة التماس . 	المماس المشترك لدائرتين : هو مستقيم مماس لكل من الدائرتين . 

مبرهنة المماسين

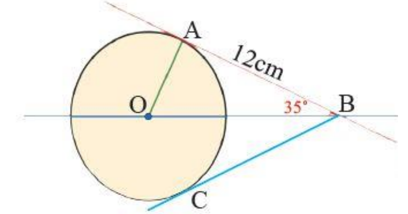
مبرهنة : القطعتان المماستان المرسومتان لدائرة من نقطة خارجة عنها متطابقتان .

$\overline{CA}$, $\overline{CB}$ مماسان للدائرة من نقطة C .

$\therefore \overline{CB} \cong \overline{CA}$



مثال : دائرة مركزها O في الشكل المجاور ، $\overline{AB}$ هو مماس للدائرة في A وقياس الزاوية ABO يساوي $35°$ جد قياس الزاوية AOB ، ثم جد طول القطعة المستقيمة BC .



الحل : $\overline{AB}$ مماس للدائرة في النقطة A

$$\overline{AB} \perp \overline{AO} \quad , \quad m\angle OAB = 90°$$

$$\because m\angle OBA = 35°$$

مجموع زوايا المثلث $= 180$

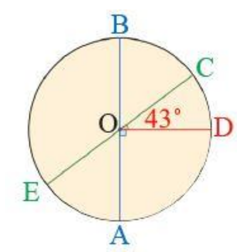
$$\therefore \; m\angle AOB + m\angle B + m\angle OAB = 180 \Longrightarrow \; m\angle AOB + 35 + 90 = 180$$

$$m\angle AOB + 125 = 180 \Longrightarrow m\angle AOB = 180 - 125 \Longrightarrow m\angle AOB = 55°$$

$$\therefore \; BC = 12\; cm$$

تأكد من فهمك

في الدائرة ادناه ، جد قياس الزوايا والاقواس فيما يأتي :



1) $\angle AOD \Longrightarrow m\angle AOD = 90°$ زاوية قائمة

2) $\angle COB \Longrightarrow m\angle COB = m\angle BOD - \angle COD = 90 - 43 = 47°$

3) $\widehat{DBE} \Longrightarrow m\widehat{DBE} = m\angle COD + m\angle COB + m\angle BOE$

$$m\widehat{DBE} = 43 + 47 + 133 = 223$$



4) $\widehat{DAB} \Longrightarrow m\widehat{DAB} = m\angle DOA + m\angle AOE + m\angle EOB$

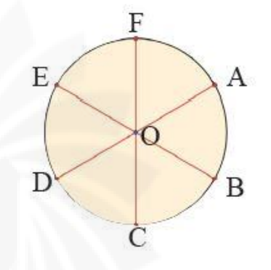
$$m\widehat{DBE} = 90 + 47 + 133 = 270$$

دائرة مقسمة الى 6 اجزاء متطابقة جد قياس كل قوس مما يأتي :

5) $\widehat{AB} \Longrightarrow m\widehat{AB} = m\angle AOB \quad , \quad m\angle AOB = \dfrac{360}{6} = 60$

$$\therefore m\widehat{AB} = 60°$$

$\therefore$ قياس كل زاوية مركزية في هذا الشكل $= 60$ لأن الاجزاء متطابقة .



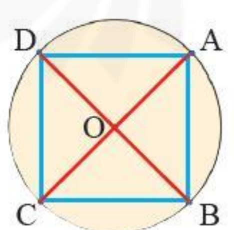
6) $\widehat{ABC} \Longrightarrow m\widehat{ABC} = m\angle AOB + m\angle BOC = 60 + 60 = 120°$

7) $\widehat{ABD} \Longrightarrow m\widehat{ABD} = m\angle AOB + m\angle BOC + m\angle COD$

$$= \quad 60 \quad + \quad 60 \quad + \quad 60 = 180°$$

8) الدائرة المجاورة مقسمة الى 4 اجزاء متطابقة، برهن ان الشكل ABCD مربع .

الحل :



$$\widehat{AB} = m\angle AOB = \frac{360}{4} = 90°$$

$$\therefore \widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CD} \cong \widehat{DA}$$

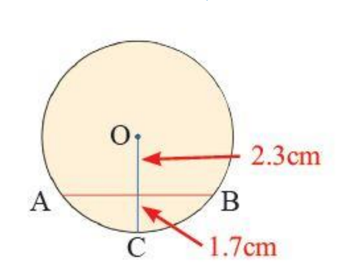
$$\therefore \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$$



$\therefore$ الشكل ABCD مربع لأن كل الاضلاع في الشكل متساوية .

9) في الشكل المجاور استعمل مبرهنة القطر العمودي وجد طول القطعة المستقيمة AB في الدائرة المجاورة مقربا الناتج الى أقرب عشر .

الحل : ارسم نصف قطر $\overline{OD}$



$$OD = OC = 2.3 + 1.7 = 4\ cm$$

$$(OB)^2 = (OE)^2 + (EB)^2 \Rightarrow (4)^2 = (2.3)^2 + (EB)^2$$

$$16 = 5.29 + (EB)^2 \Rightarrow (EB)^2 = 16 - 5.29 = 10.71$$

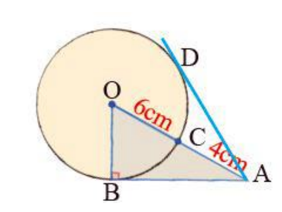
$$EB = \sqrt{10.71} = 3.3\ cm$$

$$AB = 2 \times EB = 2 \times 3.3 = 6.6\ cm$$

E منتصف $\overline{AB}$ مبرهنة القطر العمودي .

9) استعمل مبرهنة المماس لتجد طول القطعة المستقيمة AB , AD في الشكل المجاور .

الحل : AB مماس للدائرة في B ، AD مماس للدائرة في D



$\overline{OB} \perp \overline{AB}$, $m\angle ABO = 90$ قائمة (مبرهنة المماس)

$OB = OC = 6cm$, $OA = 6 + 4 = 10\ cm$

$$(OA)^2 = (OB)^2 + (AB)^2 \Rightarrow (10)^2 = (6)^2 + (AB)^2$$

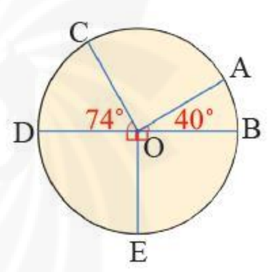
$$100 = 36 + (AB)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 100 - 36 = 64$$

$$(AB)^2 = 64 \xRightarrow{\text{بالجذر}} AB = 8$$

$\overline{AB} \cong \overline{AD} \Rightarrow AD = 8cm$ مبرهنة المماسين

تدرب وحل التمرينات

جد قياس الزوايا والاقواس فيما يأتي :



11) $\angle COA \Rightarrow m\angle COA = 180° - (m\angle BOA + m\angle COD)$

$m\angle COA = 180° - (74 + 40) = 180 - 114 = 66°$

12) $\widehat{DBE}$ واجب

13) $\widehat{BAC} \Rightarrow m\widehat{BAC} = m\angle BOA + m\angle COA = 40 + 66 = 106$

$m\widehat{DBE} = 43 + 47 + 133 = 223$

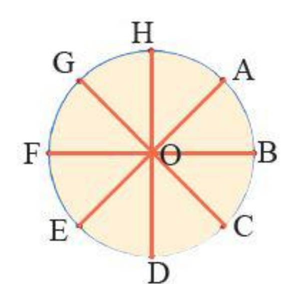
14) $\widehat{DCA} \Rightarrow m\widehat{DCA} = m\angle DOC + m\angle COA$

$m\widehat{DCA} = 74 + 66 = 140$

الدائرة مقسمة الى 8 اجزاء متطابقة جد قياس كل قوس مما يأتي :



$15)\ \widehat{AB} \Rightarrow m\widehat{AB} = m\angle AOB \quad , \quad m\angle AOB = \dfrac{360}{8} = 45$



∴ قياس كل زاوية مركزية في هذا الشكل $= 45$ لأن الاجزاء متطابقة .

$16)\ \widehat{ABC}$ واجب

$17)\ \widehat{GDB} \Rightarrow m\widehat{GDB} = 5 \times +m\angle BOC = 5 \times 45 = 225$

18) الدائرة المجاورة مقسمة الى 6 اجزاء متطابقة، برهن ان الشكل ABCDEF سداسي منتظم .

الحل :

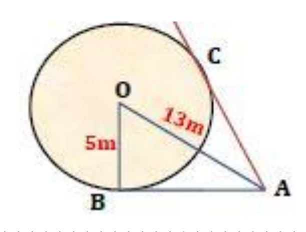
$\widehat{AB} = m\angle AOB = \dfrac{360}{6} = 60°$

$\therefore \widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CD} \cong \widehat{DE} \cong \widehat{EF} \cong \widehat{FA}$

$\therefore \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FA}$

∴ الشكل ABCDEF سداسي منتظم لأن كل الاضلاع في الشكل متساوية

19) استعمل مبرهنة المماس لتجد طول القطع المستقيمة AB, AC في الدائرة المجاورة .واجب



تدرب وحل مسائل حياتية



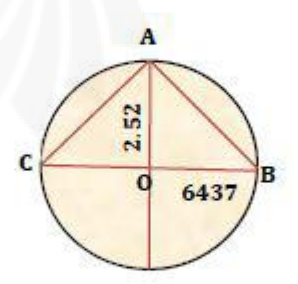
20) جغرافية (براكين) : ترتفع فوهة بركان(هولالاي)عن مستوى سطح البحر $2.52\ km$ احسب المسافة بين قمة البركان ومستوى الافق اذا علمت ان نصف قطر الارض $6437\ km$ تقريبا مقربا الناتج لاقرب كيلومتر .

الحل :

$(AB)^2 = (AO)^2 + (BO)^2 \Rightarrow (AB)^2 = (2.52)^2 + (6437)^2$

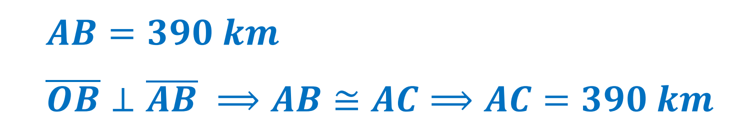
$(AB)^2 = 6.4 + 41434969 \Rightarrow (AB)^2 = 41434975.4$

$(AB)^2 = 41434975.4 \Rightarrow AB = \sqrt{41434975.4} \approx 6437\ km$



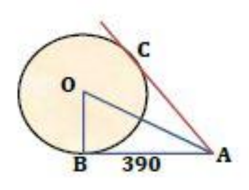
21) محطة فضائية : تبعد محطة مير الروسية عن مستوى سطح البحر مسافة $390\ km$ تقريبا ، ما المسافة بين هذه المحطة والافق ، مقربا الناتج الى اقرب كيلومتر.علما ان نصف قطر الارض $6437\ km$ تقريبا .


الحل :



$$AB = 390\ km$$

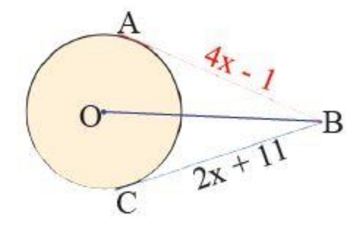
$$\overline{OB} \perp \overline{AB} \Longrightarrow AB \cong AC \Longrightarrow AC = 390\ km$$



فكر



22) تحدِ :استعمل مبرهنة المماسين وجد طول $\overline{AB}$ في الدائرة المجاورة .



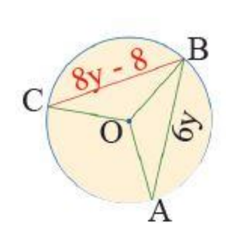
الحل :

$\because \overline{AB} \cong \overline{BC} \Longrightarrow \overline{AB} = \overline{BC}$ مبرهنة المماسين

$$4x - 1 = 2x + 11 \Longrightarrow 4x - 2x = 11 + 1 \Longrightarrow 2x = 12$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2} \Longrightarrow x = 6\ ,\ \overline{AB} = 4x - 1 = 4(6) - 1 = 24 - 1 = 23$$

23) حس عددي : اذا كانت الزاويتان AOB , COB متطابقين ، جد طول $\overline{CB}$ في الدائرة المجاورة .




الحل :

$$\because \angle COB \cong \angle AOB$$

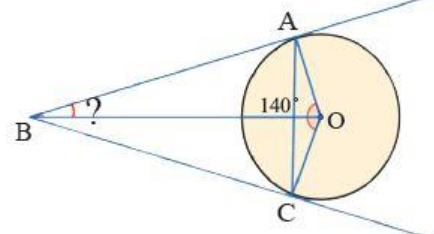
$$\widehat{AB} \cong \widehat{CB} \Longrightarrow \therefore \overline{AB} = \overline{CB}$$

$$8y - 8 = 6y \Longrightarrow 8y - 6y = 8 \Longrightarrow 2y = 8 \Longrightarrow \frac{2y}{2} = \frac{8}{2} \Longrightarrow y = 4$$

$$\therefore \overline{CB} = 8y - 8 \Longrightarrow \overline{CB} = 8(4) - 8 = 32 - 8 = 24$$

أكتب : الخطوات اللازمة لتجد قياس زاوية ABC في الرسم المجاور اذا علمت أن $\overline{BO}$ ينصف الزاوية AOC والتي قياسها يساوي $140°$.


الحل : $\overline{BO}$ ينصف الزاوية AOC



$m\angle BAO = 90°$ قائمة , $m\angle BCO = 90°$

$$m\angle AOB = m\angle COB = \frac{140}{2} = 70°$$

$$m\angle ABO + m\angle AOB + m\angle BAO = 180°$$

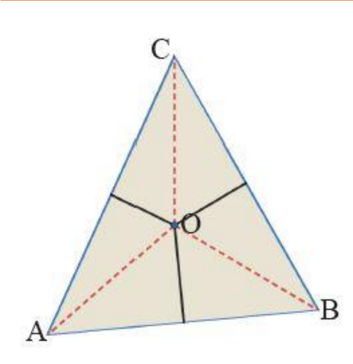
$m\angle ABO + 70 + 90 = 180° \Rightarrow m\angle ABO + 160 = 180°$

$m\angle ABO = 180° - 160 = 20$

$m\angle COB$ واجب

$m\angle ABO + m\angle COB = 20 + 20 = 40$

المثلث والدائرة ، القطع المستقيمة والدائرة



تعلم : في Δ ABC المجاور يتقاطع محور BC ومحور AB في O ، OB = OC

لأن O تقع على محور BC ، OA = OC وبالتالي O تقع على محور AC اي

ان محور AC يمر في O . OA = OB = OC

نستطيع أن نرسم دائرة مركزها O وتمر في رؤوس المثلث ABC .

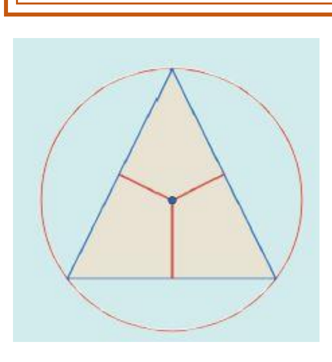
فكرة الدرس :

- استعمال خصائص المحاور ومنصفات الزوايا لارسم الدائرة المحيطة والدائرة المحاطة في مثلث .
- اجد اطوال القطع المستقيمة يحددها قاطعان على دائرة .

المفردات :

- الدائرة المحيطة .
- الدائرة المحاطة .

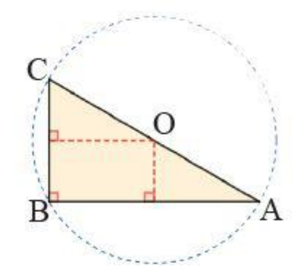
المثلث والدائرة



تعرفنا سابقا في الدرس (2) الى مبرهنة (القطعة المستقيمة المتوسطة للمثلث) :
[تتقاطع محاور الاضلاع الثلاثة للمثلث في نقطة واحدة] . ومنها نستطيع ان نرسم الدائرة المحيطة بالمثلث .الدائرة المحيطة(الدائرة الخارجية للمثلث) لكل مثلث دائرة واحدة تحيط . به مركزها نقطة تقاطع المحاور الثلاثة .

المحاور : هي الاعمدة المقامة على اضلاع مثلث من منتصفاتها تلتقي بنقطة واحدة O تكون متساوية البعد عن رؤوسه وهذه النقطة هي مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث .

مثال : جد نقطة تقاطع محاور المثلث ABC كما في الشكل المجاور وارسم الدائرة المحيطة به .



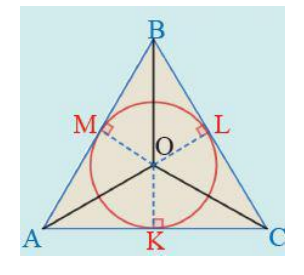
الحل : محور $\overline{AB}$ يمر في منتصف $\overline{AB}$ ويوازي $\overline{BC}$.

محور $\overline{BC}$ يمر في منتصف $\overline{BC}$ ويوازي $\overline{AB}$.



$\therefore$ المحاور الثلاثة تلتقي في منتصف $\overline{AB}$ والتي تمثل مركز الدائرة المحيطة بالمثلث .

بالامكان الاستفادة من مبرهنة منصفات زوايا المثلث لرسم الدائرة المحاطة بمثلث (الدائرة الداخلية للمثلث)

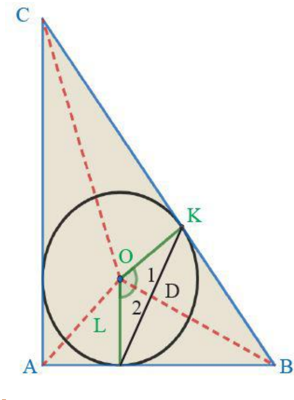


- تتقاطع منصفات زوايا المثلث في نقطة واحدة .
- نقطة تقاطع منصفات الزوايا تقع على المسافة نفسها من الاضلاع الثلاثة .

في كل مثلث توجد دائرة داخل المثلث مماسة لاضلاعه الثلاثة وتسمى الدائرة المحاطة.

$$OL = OK = OM$$

مثال : الدائرة التي مركزها O محاطة بالمثلث ABC برهن أن $\overline{BO}$ منصف $\angle LOK$ والمحور $\overline{KL}$.



الحل :

$BK = BL \quad , \quad OK = OL$

$\because$ المثلثان BOK , BOL متطابقان [مبرهنة التطابق (ض . ض . ض)]

من التطابق $m\angle 1 = m\angle 2$

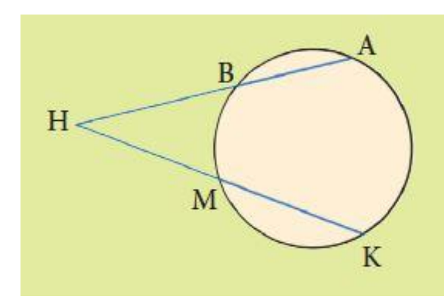
$\overline{BO}$ ينصف الزاوية LOK

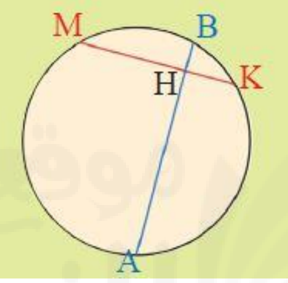
المثلثان KDB , LDB متطابقان (ض ز ض) ، $\overline{KL} \perp \overline{BO}$

$\therefore$ $\overline{KL}$ محور $\overline{BO}$

القطع المستقيمة والدائرة

مبرهنة القاطعين للدائرة : اذا قطع مستقيمان متقاطعان دائرة تشكل على كل منهما قطعتان مستقيمتان ، ناتجا ضرب طوليهما متساويان .

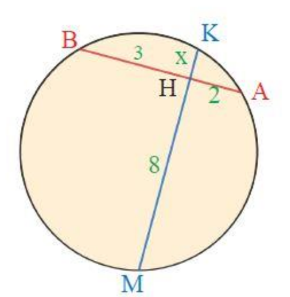




$HB \times HA = HM \times HK$

$HM \times HK = HB \times HA$

مثال : جد قيمة x وطول كل وتر .



الحل :

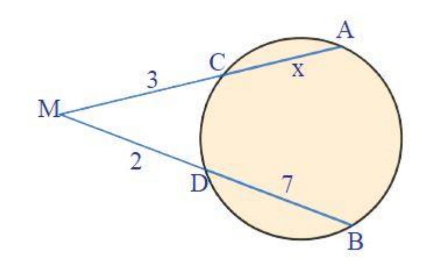
$$HM \times HK = HB \times HA$$

$$8 \times x = 3 \times 2 \Rightarrow 8x = 6 \Rightarrow \frac{8x}{8} = \frac{6}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

طول الوتر AB $\quad AB = 3 + 2 = 5$

طول الوتر MK $\quad MK = 8 + \frac{3}{4} = 8\frac{3}{4}$

مثال : جد قيمة x وطول كل من $\overline{BM}$, $\overline{AM}$.



الحل :

$$MD \times MB = MC \times MA$$

$$2 \times 9 = 3 \times (3 + x)$$

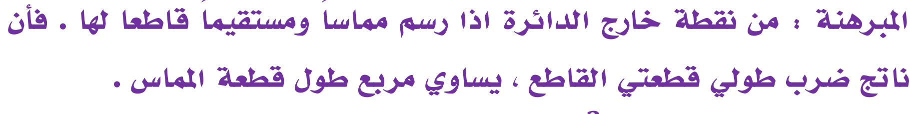
$$18 = 9 + 3x \Longrightarrow 3x = 18 - 9 \Longrightarrow 3x = 9 \Longrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$$

$$x = 3$$

طول $\overline{AM}$: $\overline{AM} = 3 + x = 3 + 3 = 6$

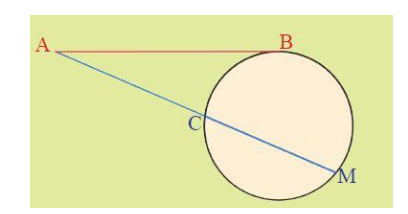
طول $\overline{BM}$: $\overline{BM} = 2 + 7 = 9$

مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة

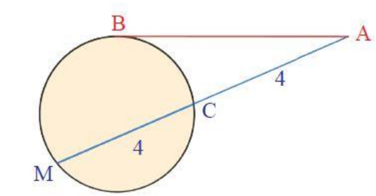


المبرهنة : من نقطة خارج الدائرة اذا رسم مماساً ومستقيماً قاطعاً لها . فأن ناتج ضرب طولي قطعتي القاطع ، يساوي مربع طول قطعة المماس .

$$AC \times AM = (AB)^2$$



مثال : جد طول قطعة المماس AB .



الحل :

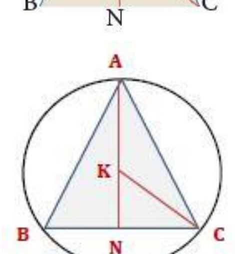
$$AC \times AM = (AB)^2$$

$$4 \times 8 = (AB)^2 \Longrightarrow 32 = (AB)^2 \xrightarrow{\text{بالجذر}} AB = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

تأكد من فهمك



1) المثلث ABC متساوي الساقين $AB = AC$ ، N منتصف $\overline{BC}$ ، برهن ان $\overline{KA} \cong \overline{KC}$
K هي نقطة تقاطع محاور المثلث ABC ثم ارسم الدائرة المحيطة به .



الحل :

محور $\overline{BC}$ يمر في منتصف $\overline{BC}$ ويوازي $\overline{AN}$

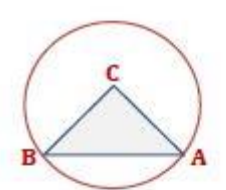


محور $\overline{AN}$ يمر في منتصف $\overline{AN}$ ويوازي $\overline{BC}$

∴ المحاور الثلاثة تمر في منتصف $\overline{AN}$

2) ABC مثلث منتظم، طول ضلعه $12\ cm$ حدد نقطة تقاطع محاوره ثم ارسم الدائرة المحيطة به وجد طول قطرها .

الحل :



محور $\overline{AB}$ يمر في منتصف $\overline{AB}$ ويوازي $\overline{BC}$

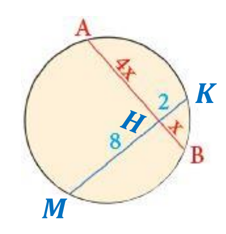
محور $\overline{BC}$ يمر في منتصف $\overline{BC}$ ويوازي $\overline{AB}$

$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

القطر $= 2 \times \overline{AC} = 2 \times 12 = 24$

جد قيمة x وطول كل مجهولة لكل مما يأتي :

3)



الحل :

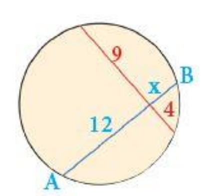
$AH \times HB = KH \times HM$

$(4x) \times x = 2 \times 8 \Rightarrow 4x^2 = 16 \Rightarrow \frac{4x^2}{4} = \frac{16}{4}$

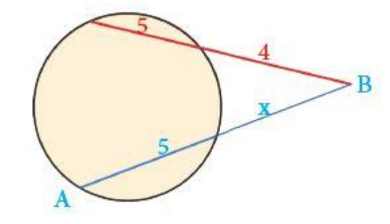
$x^2 = 4 \xrightarrow{\text{بالجذر}} x = \pm 2 \quad , \quad x = 2 \quad , \quad x = -2$ تهمل

$\overline{AB} = 4x + x = 4(2) + 2 = 8 + 2 = 10$

4) واجب

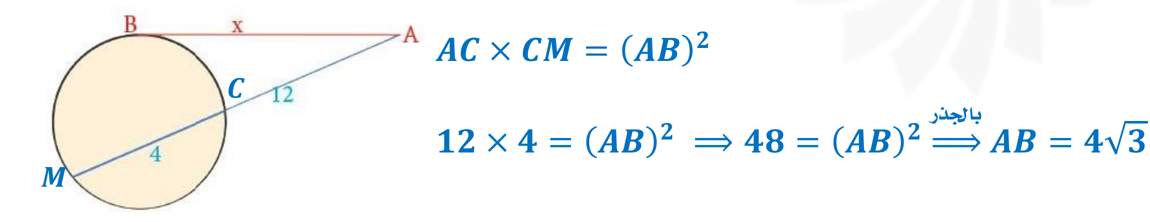


5) واجب



6) جد قيمة x وطول $\overline{AB}$

الحل :

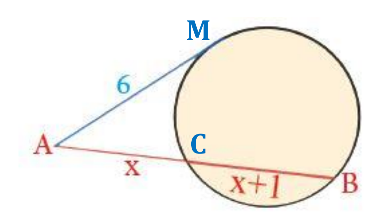


$AC \times CM = (AB)^2$

$12 \times 4 = (AB)^2 \Rightarrow 48 = (AB)^2 \xrightarrow{\text{بالجذر}} AB = 4\sqrt{3}$



7)



الحل :

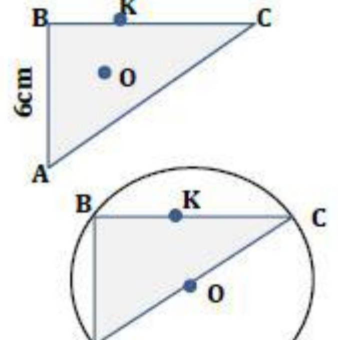
$AC \times CB = (AM)^2$

$(x) \times (x+1) = (6)^2 \Rightarrow x^2 + x = 36$

$x^2 + x - 36 = 0$ تحل بالدستور

تدرب وحل التمرينات

8) ABC مثلث قائم متساوِ الساقين وطول كل من ساقيه 6 cm ، ارسم الدائرة التي يحيط بها المثلث ABC وجد مساحة الدائرة .



الحل :

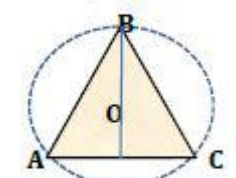
محور $\overline{BC}$ يمر في منتصف $\overline{BC}$ ويوازي $\overline{AB}$

محور $\overline{AB}$ يمر في منتصف $\overline{AB}$ ويوازي $\overline{BC}$

∴ المحاور الثلاثة تمر في منتصف $\overline{AC}$

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 6cm$

9) ABC مثلث قائم متساوِ الساقين وتره $\overline{BC}$ ، حدد نقطة تقاطع محاور هذا المثلث وارسم الدائرة المحيطة به .



الحل :

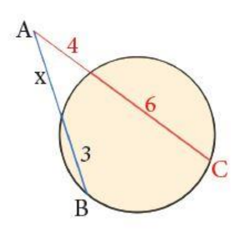
محور $\overline{AC}$ يمر في منتصف $\overline{AC}$ ويوازي $\overline{AB}$

محور $\overline{AB}$ يمر في منتصف $\overline{AB}$ ويوازي $\overline{AC}$

∴ المحاور الثلاثة تلتقي في منتصف $\overline{BC}$

جد قيمة x وطول القطع المستقيمة المجهولة لكل مما يأتي :

10)



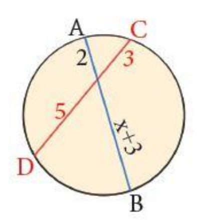
الحل :

$AM \times MB = AD \times DC$

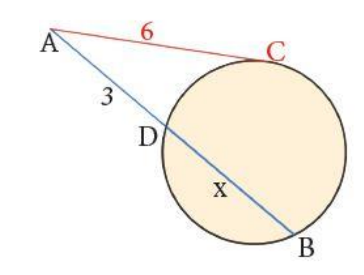
$(x) \times (3) = 4 \times 6 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{24}{3} \Rightarrow x = 8$

$\overline{AB} = 8 + 3 = 11$

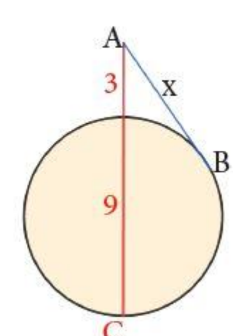
11) واجب



12) واجب



13)



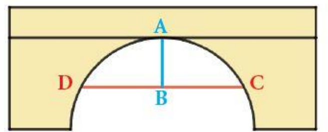
الحل :

$$AM \times MC = (AB)^2$$

$$3 \times 9 = (x)^2 \implies 27 = x^2 \overset{\text{بالجذر}}{\implies} x = 3\sqrt{3}$$

تدرب وحل مسائل حياتية

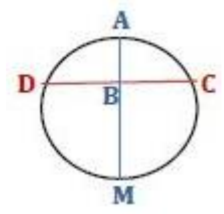
14) بناء : يرتكز جسر على قوس دائرة كما مبين في الشكل المقابل ، $\overline{DC}$ محور $\overline{AB}$ ، $AB = 60\ m$ ، $DC = 150\ m$ ما قطر الدائرة ؟



الحل :

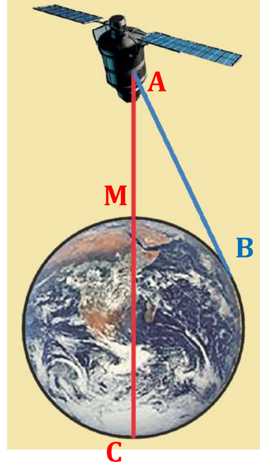
$DB = BC$ مبرهنة القاطعين في الدائرة

$$AB \times BM = DB \times BC$$



$$(60) \times BM = 75 \times 75 \implies (60) \times BM = 5625 \implies BM = \frac{5625}{60} = 93.75$$

15) فضاء : قمر صناعي يدور حول الارض على ارتفاع 8200 km اذا كان قطر الارض $12800\ km$ تقريبا ، ما المسافة التي تفصل القمر الصناعي عن النقطة B ، في الشكل المجاور .



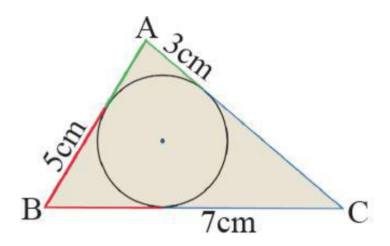
الحل :

$$AM \times MC = (AB)^2$$

$$8200 \times 12800 = (AB)^2 \Rightarrow 1049600 = (AB)^2$$

$$(AB)^2 = 1049600 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} AB = \sqrt{1049600} \approx 10250\ km$$

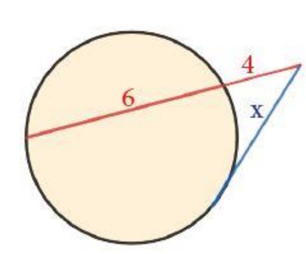
16) هندسة : O نقطة تقاطع محاور المثلث ABC ، جد محيط المثلث ABC مستعملاً الشكل المجاور . واجب



فكر

17) اكتشف الخطأ : فيما يلي حلان لايجاد قيمة x في الشكل المقابل، ايهما الحل الخطأ ؟ برر اجابتك

الحل : مبرهنة المماس والقاطع

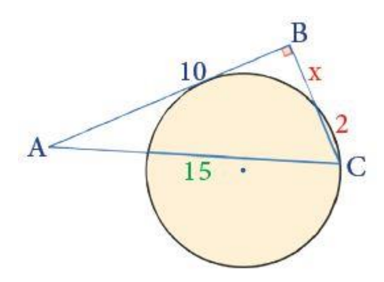


$$AM \times MC = (AB)^2$$

$$4 \times 6 = (x)^2 \Rightarrow 24 = x^2 \overset{\text{بالجذر}}{\Longrightarrow} x = 2\sqrt{6}$$

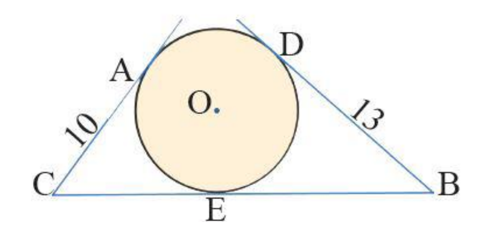
الحل الخطأ هو (ii)

18) تحد : في الشكل المقابل $AB = 10$ وهو مماس للدائرة ، جد قيمة x . واجب



19) مسألة مفتوحة : في الشكل المجاور دائرة مركزها O ، $\overline{BD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ مماسات للدائرة ، جد طول القطعة BC .

الحل :



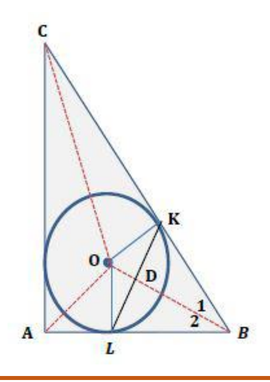
$$\overline{BD} \cong \overline{BE} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{BE} = 13$$

$$\overline{AC} \cong \overline{CE} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{CE} = 10$$

$$BC = CE + BE = 10 + 13 = 23$$

أكتب : مسألة تستعمل فيها المحاور ومنصفات الزوايا لمثلث في رسم دائرة محيطة به .

المسألة : الدائرة التي مركزها O محاطة بالمثلث ABC برهن ان BO منصف $\angle LOK$ ومحور $\overline{KL}$.



الحل : نصفا قطر الدائرة OK = OL ، مبرهنة المماسين BK = BL

$\because$ المثلثان BOL , BOK متطابقين ومن التطابق : $\angle 1 = \angle 2$

BO ينصف الزاوية LOK ، BO محور KL

المثلثان LBD , KDB متطابقان . $\therefore$ BO محور KL $\Rightarrow \overline{KL} \perp \overline{BO}$

الزوايا والدائرة

تعلم : يستعمل المفك كأداة لتثبيت البراغي او فتحها والفجوة في هذه الاداة تأخذ شكلاً سداسيا داخل اسطوانة معدنية . وكل زاوية في الشكل السداسي تكون زاوية محيطية داخل الدائرة .


فكرة الدرس :


- اجد قياس الزوايا المحيطية والمماسية .


- ايجاد قياسات زوايا تتقاطع اضلاعها مع دائرة .

المفردات :

- الزاوية المحيطية
- الزاوية المركزية

الزاوية المحيطية

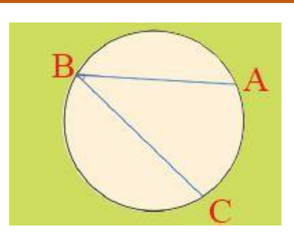
درست سابقا تعريف القوس بدلالة الزاوية المركزية وكيفية قياس القوس وفي هذا الدرس سنتعرف الى :

الزاوية المحيطية : وهي الزاوية التي رأسها نقطة من نقاط الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة . وكذلك سنتعرف الى كيفية قياسها باستعمال القوس المواجه لها بواسطة المبرهنات الاتية وهي بدون برهان .

مبرهنة الزوايا المحيطية

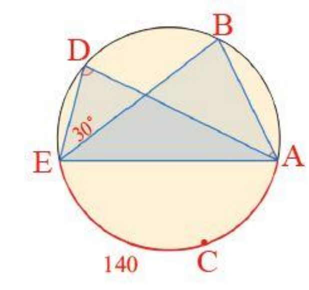
قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المواجه لها .

$$m\angle B = \frac{1}{2}\, m\widehat{AC}$$



مثال : جد قياس الزوايا المحيطية التالية في الشكل المجاور . $i)\ \angle D \quad , \quad ii)\ \angle BAD$

الحل :



$$i)\ \angle D \Rightarrow m\angle D = \frac{1}{2}\, m\widehat{ECA}$$

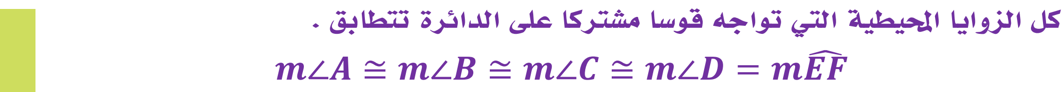
$$m\angle D = \frac{1}{2} \times 140 = 70^\circ$$

$$ii)\ \angle BAD \Rightarrow m\angle BAD = \frac{1}{2}\, m\widehat{BD}$$ مبرهنة الزوايا المحيطية

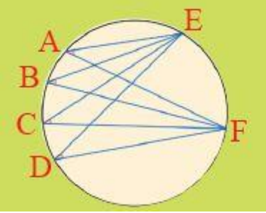
$$m\angle BED = m\angle BAD = 30^\circ$$

مبرهنة الزوايا المحيطية المواجهة للقوس نفسه

كل الزوايا المحيطية التي تواجه قوسا مشتركا على الدائرة تتطابق .



$$m\angle A \cong m\angle B \cong m\angle C \cong m\angle D = m\widehat{EF}$$



هناك حالة خاصة للزاوية المحيطية عندما تكون زاوية قائمة :

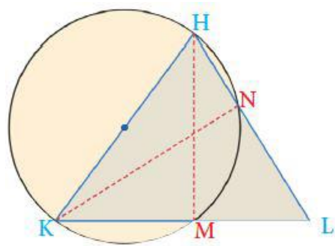
- كل زاوية محيطية تواجه نصف دائرة تكون قائمة .
- كل زاوية محيطية تواجه قطراً تكون قائمة .
- كل زاوية محيطية قائمة تواجه قطرا .

$$m\angle A = m\widehat{BC} = 90^\circ$$

مثال : دائرة قطرها KH تقطع HL في N وتقطع KL في M ، كما في الشكل المجاور ، برهن أن $\overline{KN}$, $\overline{HM}$ ارتفاعات في المثلث HKL .



الحل :



$\because\ m\angle HNK$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{KH}$

$\therefore\ m\angle HNK = 90^\circ$ قائمة

$\overline{KN}$ ارتفاع في المثلث HKL

$\because\ m\angle HMK$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{KH}$

$\therefore\ m\angle HMK = 90^\circ$ قائمة

$\overline{HM}$ ارتفاع في المثلث HKL

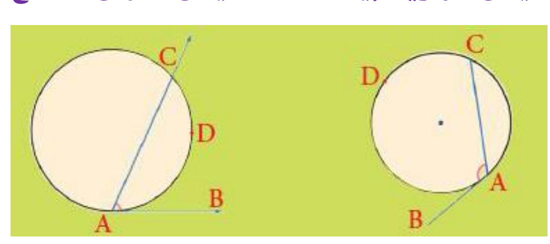
الزاوية المماسية

الزاوية المماسية : هي الزاوية التي يشكلها مماس الدائرة مع مستقيم اخر يمر في نقطة التماس (وتر للدائرة) .

مبرهنة الزوايا المماسية

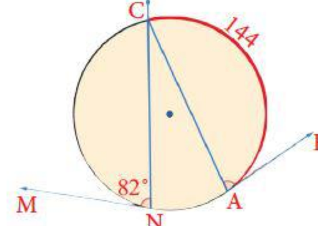
اذا تقاطع مماس الدائرة مع مستقيم يمر في نقطة التماس يكون قياس الزاوية بينهما نصف قياس القوس المقتطع .

$$m\angle A = \frac{1}{2}\, m\widehat{ADC}$$



مثال : باستعمال مبرهنة الزوايا المماسية والشكل المجاور جد قياس كل مما يأتي : $ii)\ \widehat{NC}$ $\quad i)\ \angle BAC$

الحل :



مبرهنة الزوايا المماسية

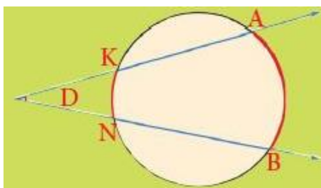
$$i)\ m\angle BAC = \frac{1}{2} m\widehat{CA}$$
$$= \frac{1}{2} \times 144 = 72$$
$$\therefore\ m\angle A = 72^\circ$$

$ii)\ \widehat{NC}$

$$m\angle CNM = \frac{1}{2} m\widehat{CN}$$
$$82 = \frac{1}{2} m\widehat{CN}$$
$$\therefore\ m\widehat{CN} = 82 \times 2 = 164$$

الزوايا الداخلية والخارجية في الدائرة

مبرهنة الزاويا الخارجية في الدائرة : اذا تقاطع مستقيمان خارج دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف الفرق بين قياس القوسين المقتطعين .



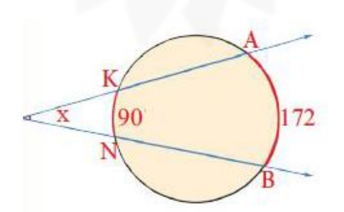
$$m\angle D = \frac{1}{2}\left(m\widehat{AB} - m\widehat{KN}\right)$$

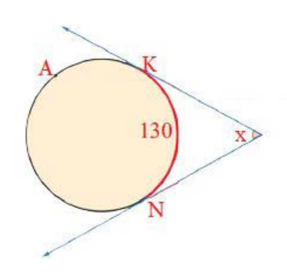
مثال : جد قيمة الزاوية الخارجية x في كل مما يأتي :

(i) باستعمال مبرهنة الزاوية الخارجية في الدائرة وبالتعويض عن قيمة الاقواس في الرسم نجد قياس زاوية x .

(ii) باستعمال مبرهنة الزاوية الخارجية في الدائرة وبالتعويض عن قيمة $\widehat{KAN}$ بـ 360 نجد قياس زاوية x .

$$i)\ m\angle x = \frac{1}{2}\left(m\widehat{AB} - m\widehat{KN}\right)$$
$$m\angle x = \frac{1}{2}(172 - 90) = \frac{1}{2}(82) = 41^\circ$$





$ii)\quad m\widehat{KAN} = 360 - 130 = 230$

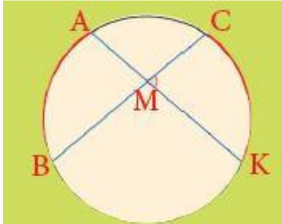
$m\angle x = \frac{1}{2}(m\widehat{KAN} - m\widehat{KN})$

$m\angle x = \frac{1}{2}(230 - 130) = \frac{1}{2}(100)$

$m\angle x = 50°$

مبرهنة الزاوية الداخلية في دائرة

مبرهنة الزاوية الداخلية في دائرة : اذا تقاطع مستقيمان داخل دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف مجموع قياس القوسين المقتطعين .



$m\angle CMK = \frac{1}{2}(m\widehat{CK} + m\widehat{AB})$

مثال : جد قياس $m\angle ADB$ مستعملاً مبرهنة الزوايا الداخلية في الدائرة :

الحل :

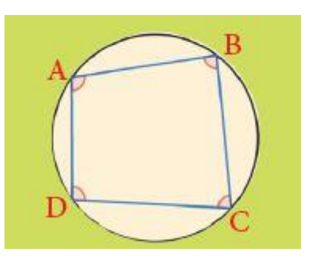
$m\angle ADB = \frac{1}{2}(m\widehat{KN} + m\widehat{AB})$ مبرهنة الزوايا الداخلية في دائرة

$= \frac{1}{2}(102 + 44)$

$m\angle ADB = \frac{1}{2}(146) = 73°$

مبرهنة الرباعي الدائري


في كل رباعي دائري مجموع قياس كل زاويتين متقابلتين يساوي $180°$.

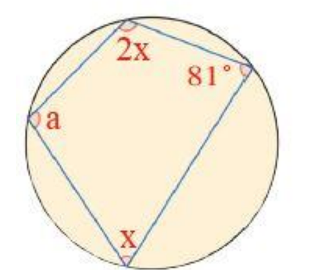


$m\angle A + m\angle C = 180°$

$m\angle B + m\angle D = 180°$

مثال : جد قياس $a\,,x$ في الشكل المجاور :

الحل : مبرهنة الرباعي الدائري



$2x + x = 180° \Rightarrow 3x = 180° \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{180°}{3} \Rightarrow x = 60°$

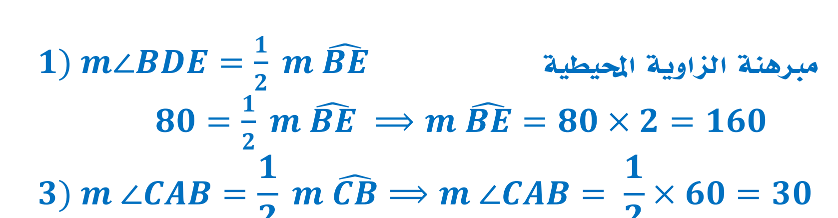
$a + 81° = 180° \Rightarrow a = 180° - 81 \Rightarrow a = 99°$

تأكد من فهمك

1) $m\ \widehat{BE}$

3) $m\ \angle CAB$

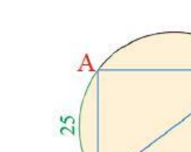
الحل :



1) $m\angle BDE = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BE}$ مبرهنة الزاوية المحيطية

$80 = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{BE} \Rightarrow m\ \widehat{BE} = 80 \times 2 = 160$

3) $m\ \angle CAB = \dfrac{1}{2}\ m\ \widehat{CB} \Rightarrow m\ \angle CAB = \dfrac{1}{2} \times 60 = 30$



2) $m\ \angle ABC$

4) $m\ \angle ACB$

5) $m\ \widehat{BN}$

الحل :

2) $m\ \angle ABC = \frac{1}{2}\ m\ \widehat{AC} \Rightarrow$ مبرهنة الزاوية المحيطية

$m\ \angle CAB = \frac{1}{2} \times 25 = 12.5$

4) $m\ \angle ACB \ \Rightarrow\ m\ \angle ACB + m\ \angle ABC + m\ \angle CAB = 180$ مجموع زوايا المثلث $= 180$

$m\ \angle ACB + 12.5 + 90 = 180$

$m\ \angle ACB + 102.5 = 180 \Rightarrow m\ \angle ACB = 180 + 102.5 = 77.5$

5) $m\ \widehat{BN} \Rightarrow m\angle BCN = \dfrac{1}{2} m\ \widehat{BN} \Rightarrow 40 = \dfrac{1}{2} m\ \widehat{BN} \ \Rightarrow\ m\ \widehat{BN} = 40 \times 2 = 80$

6) $m\ \angle CKA$

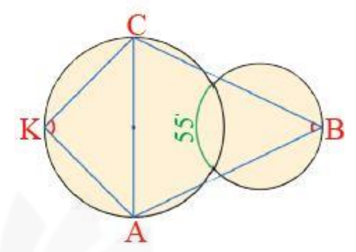
8) $m\ \angle CBA$

الحل :





6) $m\ \angle CKA = m\ \widehat{AC} = 90°$ AC زاوية محيطية تواجه القطر



8) $m\ \angle CBA = \frac{1}{2} \times$ نصف قياس القوس المقابل لها

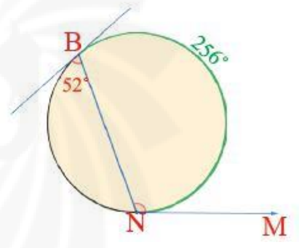
$m\ \angle CBA = \frac{1}{2} \times 55 = 27.5°$

7) $m\ \angle MNB$

9) $m\ \widehat{BN}$



الحل :

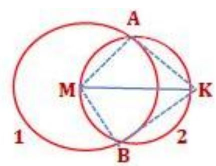


7) $m\ \angle MNB = \dfrac{1}{2} m\ \widehat{BN} = \dfrac{1}{2} m\ \widehat{256} = 128°$

9) $m\ \widehat{BN} = 256$

10) اذا علمت ان M مركز الدائرة 1 و $\overline{MK}$ هو قطر الدائرة 2 ، برهن ان $\overline{KB}$, $\overline{KA}$ مماسان للدائرة 1 .

الحل :



$\because$ KAM زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{MK}$

$\therefore$ KAM = 90 قائمة

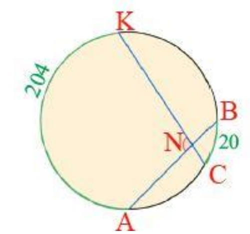
$\because KBM$ $\overline{MK}$ زاوية محيطية تواجه القطر

$\therefore KBM = 90$ قائمة

$\overline{KA} = \overline{KB} \Rightarrow 1$ هما مماسان للدائرة $\overline{KA}, \overline{KB}$

جد قياس كل مما يأتي :

11) $m\angle KNA$

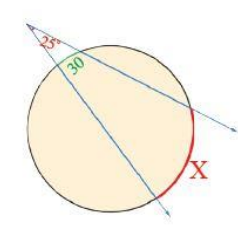


الحل :

11) $m\angle KNA = \frac{1}{2}(m\widehat{AK} + m\widehat{BC})$ مبرهنة الزاوية الداخلية في الدائرة

$\therefore m\angle KNA = \frac{1}{2}(204 + 20) = \frac{1}{2}(224) = 112°$

12) $m\angle\widehat{x}$



الحل :

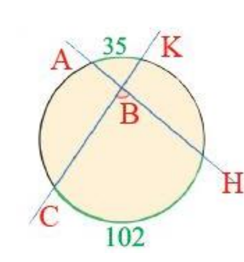
12) $m\angle C = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{KN})$ مبرهنة الزاوية الخارجية في الدائرة

$25 = \frac{1}{2}(m\angle\widehat{x} - 30) \Longrightarrow \left[25 = \frac{1}{2}(m\angle\widehat{x} - 30)\right] \times 2$

$50 = (m\angle\widehat{x} - 30) \Longrightarrow m\angle\widehat{x} = 50 + 30 = 80$

تدرب وحل التمرينات

13) $m\angle HBC$

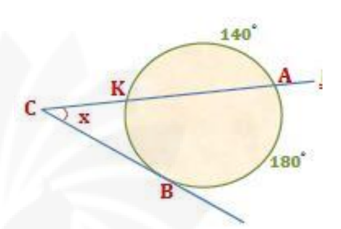


$m\angle HBC = \frac{1}{2}(m\widehat{HC} + m\widehat{AK})$ مبرهنة الزاوية الداخلية في الدائرة

$m\angle HBC = \frac{1}{2}(102 + 35) \Longrightarrow m\angle HBC = \frac{1}{2}(137)$

$m\angle HBC = 68.5$

14) $m\angle x$



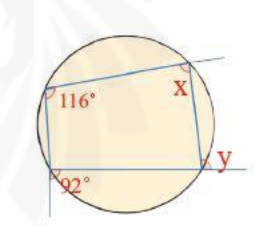
$m\angle C = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} - m\widehat{KB})$

$m\widehat{KB} = 360 - (180 + 140) = 360 - 320 = 40$

$m\angle x = \frac{1}{2}(180 - 40) \Longrightarrow m\angle x = \frac{1}{2}(140)$

$m\angle x = 70$

15) $m\angle x \ , m\angle y$

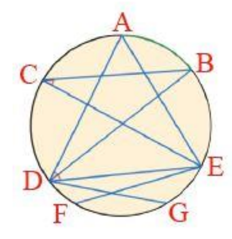


$x + x = 180 \Longrightarrow 2x = 180 \Longrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{180}{2} \Longrightarrow x = 90$

$m\angle y = 92$ بالتبادل

تدرب وحل مسائل حياتية

16) زجاج : رسم احد الفنانين الرسم المجاور على زجاج، جد قياس $\angle ADE$ اذا علمت أن $\angle BCE = 30°$ وقياس $\widehat{AB} = 42$.



الحل :

$m\angle BCE = \frac{1}{2} m\widehat{BE}$ مبرهنة الزاوية المحيطية

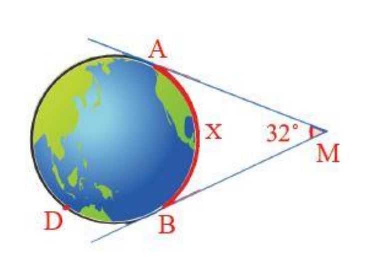
$30 = \frac{1}{2} m\widehat{BE} \Rightarrow m\widehat{BE} = 30 \times 2 = 60$

$m\angle ADE = \frac{1}{2} m\widehat{AE}$

$m\angle ADE = \frac{1}{2}\left(m\widehat{AB} + m\widehat{BE}\right) \Rightarrow m\angle ADE = \frac{1}{2}(42 + 60)$

$m\angle ADE = \frac{1}{2} \times (102) = 51$

17) فضاء : قمر صناعي يدور حول الارض عندما يصل النقطة M يكون على ارتفاع $14000km$ ما قياس القوس الذي يمكن رؤيته من كاميرا القمر الصناعي على الارض ؟



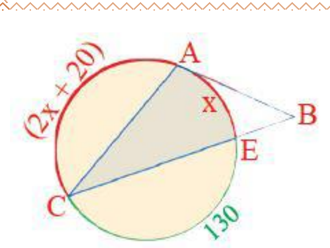
الحل :

$m\angle M = \frac{1}{2}(m\widehat{ADB} - m\widehat{AB})$

$\left[32 = \frac{1}{2}(360 - x)\right] \times 2 \Rightarrow 64 = 360 - x \Rightarrow x = 360 - 64 = 296$

فكر

18) أكتشف الخطأ : كتب سعيد $80 = \frac{160}{2} = m\angle CAB$ بين الخطأ وجد الجواب الصحيح .



الحل :

$2x + 20 + x + 130 = 360 \Rightarrow 3x + 150 = 360$

$3x = 360 - 150 \Rightarrow 3x = 210 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{210}{3} \Rightarrow x = 70$

19) حس عددي : جد قيمة الزوايا المجهولة : واجب



أكتب : مبرهنات الزوايا الداخلية والخارجية لتقارن بين الزاويتين x , y .

الحل :

تستعمل مبرهنة الزاوية الداخلية اذا تقاطع مستقيمان داخل دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف مجموع قياس القوسين المقتطعين .



$$m\angle x = \frac{1}{2}\left(m\,\widehat{BE} + m\widehat{CD}\right)$$

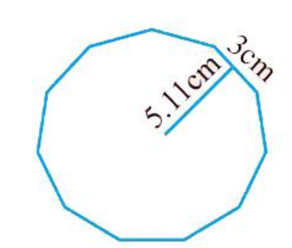
تستعمل مبرهنة الزاوية الخارجية اذا تقاطع مستقيمان خارج دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف الفرق بين القوسين .

$$m\angle y = \frac{1}{2}\left(m\,\widehat{BC} - m\widehat{DE}\right)$$



إختبار الفصل

1) جد مساحة ومحيط مضلع منتظم اذا اعطيت المعلومات في الشكل المجاور .



الحل :

$$H = 5.11\ cm \quad , \quad L = 3cm \quad , \quad n = 11$$

$$P = n \times L \Rightarrow P = 11 \times 3 = 33\ cm^2$$

$$A = \frac{1}{2} L \times H \times n \Rightarrow A = \frac{1}{2} \times 3 \times 5.11 \times 11$$

$$A = \frac{1}{2} \times 168.63 = 84.315\ cm^2$$

2) جد المساحة السطحية والحجم للمخروط اذا علمت ان مساحة قاعدته $9\pi\ cm^2$ وارتفاعه الجانبي $5\ cm$.

الحل : $\ell = 5 \quad , \quad b = 9\pi$

القاعدة دائرة $b = \pi r^2$

$$9\pi = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = 9 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} r = 3$$

$$\ell^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow (5)^2 = h^2 + (3)^2 \Rightarrow 25 = h^2 + 9$$

$$h^2 = 25 - 9 \Rightarrow h^2 = 16 \overset{\text{بالجذر}}{\Rightarrow} h = 4\ cm$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(3)^2 \times 4 \Rightarrow V = 3\pi \times 4 = 12\pi\ cm^3$$

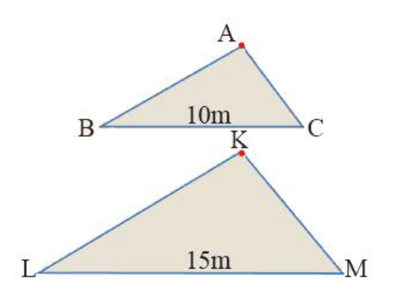
$$TA = \pi r \times \ell + \pi r^2 \Rightarrow TA = 3\pi \times 5 + \pi(3)^2 = 15\pi + 9\pi = 24\pi\ cm^2$$

3) المثلثان ABC, KLM متشابهان، مساحة المثلث ABC تساوي $24cm^2$ ما مساحة المثلث KLM .

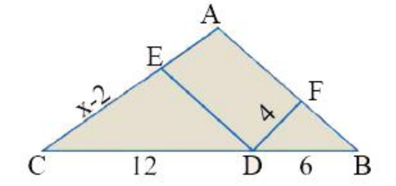
الحل : نفرض مساحة المثلث $A_1 = ABC$ ، نفرض مساحة المثلث $A_2 = KLM$

$$\frac{(BC)^2}{(ML)^2} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{(10)^2}{(15)^2} = \frac{24}{A_2} \Rightarrow \frac{100}{225} = \frac{24}{A_2} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{24}{A_2}$$

$$A_2 \times 4 = 24 \times 9 \Longrightarrow A_2 = \frac{24 \times 9}{4} = 6 \times 9 = 54\ cm^2$$

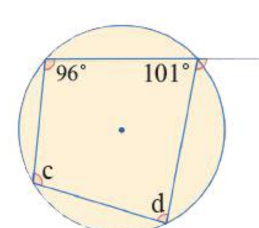


4) بين أن المثلثان ABC , FBD في الشكل المجاور متشابهان ، حيث ان $\overline{AC} // \overline{FD}$ جد قيمة x . واجب



5) جد قياس الزوايا المجهولة في الاشكال الآتية :

$i)$

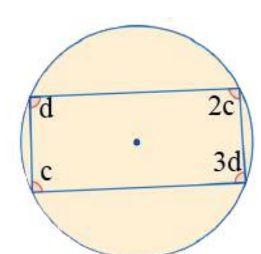


مبرهنة الرباعي الدائري

$c + 101 = 180° \Longrightarrow c = 180° - 101 \Longrightarrow c = 79$

$d + 96° = 180° \Longrightarrow d = 180° - 96 \Longrightarrow a = 84°$

$ii)$



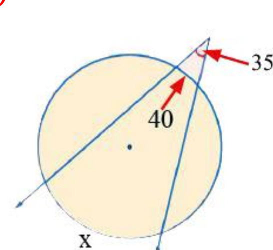
مبرهنة الرباعي الدائري

$$c + 2c = 180° \Longrightarrow 3c = 180° \Longrightarrow \frac{3c}{3} = \frac{180°}{3} \Longrightarrow c = 60°$$

$$d + 3d = 180° \Longrightarrow 4d = 180° \Longrightarrow \frac{4d}{4} = \frac{180°}{4} \Longrightarrow d = 45°$$

6) جد قيمة x في كل مما يأتي :

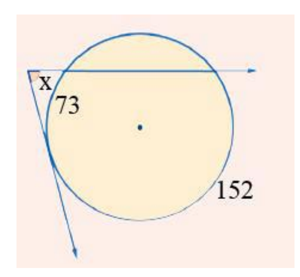
$i)$



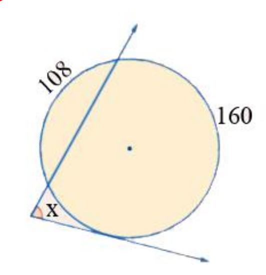
$$\left[35 = \tfrac{1}{2}(x - 40)\right] \times 2$$

$$70 = x - 40 \Longrightarrow x = 70 + 40 = 110$$

$ii)$ واجب

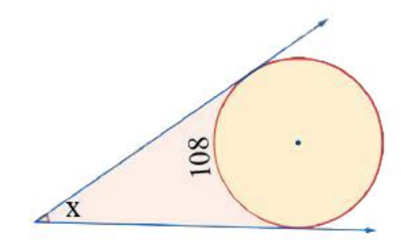


$iii)$

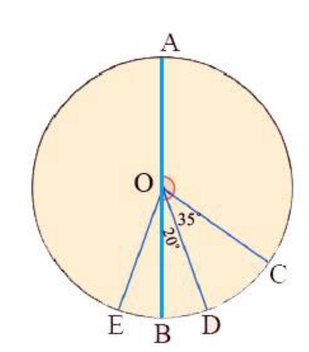


$$y = 360 - (160 + 108)$$
$$y = 360 - 268 = 92$$
$$x = \frac{1}{2}(160 - 92) = \frac{1}{2} \times 68° = 34°$$

$iv)$ واجب



6) جد قياس الزوايا والاقواس المجهولة في الشكل المجاور .



$i)\ m\angle AOC$ $\quad ii)\ m\widehat{DC}$

$iii)\ m\widehat{DB}$ $\quad iv)\ m\angle DOA$

الحل :

$$i)\ m\angle AOC = 360 - (m\angle AOB + m\angle BAO + m\angle DOC)$$
$$m\angle AOC = 360 - (180 + 20 + 35)$$
$$m\angle AOC = 360 - 235 = 125$$

$ii)\ m\widehat{DC}$

$$m\angle DOC = \frac{1}{2} m\widehat{DC}$$
$$35 = \frac{1}{2} \times m\widehat{DC} \Rightarrow m\widehat{DC} = 35 \times 2 = 70°$$

$iii)\ m\widehat{DB}$ واجب

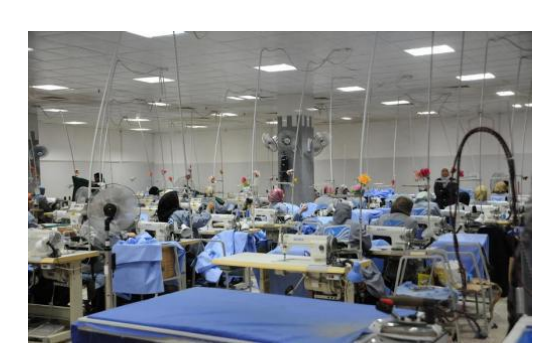
$iv)\ m\angle DOA$ واجب


الأستاذ محمد حميد
الفصل السادس
الاحصاء والاحتمالات

الفصل السادس

الاحصاء والاحتمالات

تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها :



تعلم : يعد معمل النجف لصناعة البدلات الرجالية من الصروح المهمة في الصناعة الوطنية حيث يحرص المعنيون على تحقيق امور لضمان جودة المنتج .وذلك من خلال فحص نوع القماش، والالوان والتصاميم الحديثة وغيرها . ان فحص كل المنتج ستكون عملية غير منطقية لذا يفحص عدد محدود من تلك البدلات بدلاً من ذلك . ليستنتج ان المنتج قد يحتاج الى تطوير .

فكرة الدرس :

- تصميم دراسة مسحية
- تحليل النتائج

المفردات :

- دراسة مسحية
- المجتمع
- العينة

تصميم دراسة مسحية

العينة : هي مجموعة جزئية من المجتمع . ومن خلال تحليل نتائج العينة يمكن التوصل الى استنتاجات حول المجتمع كاملاً . تكون الاستنتاجات اكثر تمثيلا للمجتمع في اي من الحالتين :

- حجم العينة اكبر .
- استعمال عينات اكثر .

ولنوع العينة تاثير في الاستنتاجات التي يتوصل اليها وهي على نوعين :

العينة المتحيزة : اذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار .

العينة غير المتحيزة : اذا كان لافرادها احتمالات مختلفة في الاختيار .

مثال : وزع مدير مدرسة 100 ورقة استبانة على طلاب مدرسته للتعرف الى جودة المواد الغذائية في حانوت المدرسة .

i) حدد العينة والمجتمع الذي اختيرمنه .

ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله المدير .

iii) حدد ما اذا كانت العينة متحيزة ام غير متحيزة .

الحل :

i) العينة : الطلاب الذين تسلموا الاستبيانات وعددهم 100 طالب .

المجتمع : جميع طلاب المدرسة .

ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية ، اذ تؤخذ البيانات من اجابات افراد العينة نحو الاستبانة .

iii) العينة غير متحيزة : لان هذه العينة تتكون من طلاب اختيروا عشوائيا .

مثال : يريد صاحب متجر ان يقدم هدية لكل زبون يتسوق من متجره .فوقف عند باب المتجر وسأل 20 متسوقا عن نوع الهدية التي يود ان تُقدم له .

i) حدد العينة و المجتمع الذي اختاره صاحب المتجر .

ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله صاحب المتجر .

iii) حدد ما اذا كانت العينة متحيزة ام غير متحيزة .

الحل :

i) العينة : المتسوقون الذين سألوا وعددهم 20 متسوقا .

المجتمع : المتسوقون الذين دخلوا المتجر .

ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية، اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة .

iii) العينة غير متحيزة، لان الاشخاص الذين دخلوا المتجر اختيروا عشوائيا .

تحليل النتائج

بعد جمع البيانات من خلال الدراسة المسحية تلخص البيانات كي تكون ذات معنى وذلك عن طريق استعمال مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال) والتي دُرست سابقا ، بطرائق مختلفة واختيار المقياس الأنسب لتمثيل البيانات .

النوع	متى يفضل استعماله
الوسط الحسابي	عندما لا توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات .
الوسيط	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات ، ولكن لا توجد فجوات كبيرة في وسط البيانات .
المنوال	عندما يوجد اعداد متكررة في مجموعة البيانات.

مثال : اي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لوصف البيانات في كل مما يأتي :

i) البيانات المجاورة تبين اوزان 10 صناديق بالكيلو غرام : $3, 2, 3, 6, 5, 5, 21, 4, 3, 5$

الحل : الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي 21 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي

المنوال : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود اكثر من منوال هما : $3, 5$

الوسيط : هو المقياس الأنسب لتمثيل هذه البيانات لعدم وجود فجوة كبيرة في وسط البيانات

$$2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 21$$

$$\text{الوسيط} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

ii) حصل محمد على الدرجات التالية في خمسة اختيارات في مادة الرياضيات : $90, 93, 85, 86, 91$

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{90+93+85+86+91}{5} = \frac{445}{5} = 89$$

الوسط الحسابي $= 89$ هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة .

الوسيط : وهو القيمة التي تتوسط القيم . نرتب الدرجات تصاعديا او تنازليا 91 , 93 , 90 , 86 , 85

الوسيط = 90 هو المقياس المناسب لتمثيل البيانات لانه يتوسط البيانات ولا يوجد فجوة كبيرة في وسط البيانات لذا كلاهما مقياس مناسب لتمثيل البيانات .

المنوال : لا يوجد لعدم وجود تكرار في البيانات .

تأكد من فهمك

حدد العينة و المجتمع ثم صف اسلوب جمع البيانات وميز العينة المتحيزة عن العينة غير متحيزة في كل مما يلي فسر اجابتك :

(1) دخل 30 شخص مكتبة عامة وسئل كل سادس شخص يدخل المكتبة عن هوايته المفضلة .

(2) وزعت 100 استبانة على مجموعة من عمال احد المصانع تتضمن سؤالاً حول ظروف العمل في المعمل .

(3) وزعت الحيوانات في احدى حدائق الحيوانات، ثم اختير حيوان من كل مجموعة بصورة عشوائية لاجراء فحوصات عليه .

الحل :

(1) (i) العينة : الاشخاص الذين سألوا وعددهم 5 اشخاص .

المجتمع : شخص واحد من كل ستة اشخاص دخلوا المكتبة .

(ii) اسلوب جمع البيانات : هو دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة .

(iii)العينة متحيزة : لأن الهواية المفضلة للأشخاص الذين يدخلون المكتبة هو القراءة.

(2) (i) العينة : الاشخاص الذي تسلموا الاستبيانات وعددهم 100 عامل .

المجتمع : جميع عمال المصنع .

(ii) اسلوب جمع البيانات : هو دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة نحو الاستبانة .

(iii) العينة غير متحيزة : لأن هذه العينة تتكون من عمال اختيروا عشوائيا .

(3) (i) العينة : حيوان واحد من كل مجموعة من الحيوانات عشوائيا .

المجتمع : مجموعة من الحيوانات .

(ii) اسلوب جمع البيانات : هي دراسة مسحية اذ تؤخذ الفحوصات من افراد العينة المختارة.

(iii) العينة غير متحيزة : لأن نتائج الفحوصات مختلفة من حيوان لآخر .

اي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لوصف البيانات التالية ؟ فسر اجابتك

(4) 8 , 10 , 14 , 8 , 13 , 6

(5) 8 , 10 , 8, 9, 11, 4, 6, 54

(6) 8, 9, 8, 6, 10, 9 , 11, 13, 14, 8, 6, 7, 19

الحل : (4) الوسط الحسابي $= \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{8+10+14+8+13+6}{6} = \frac{59}{6} = 9.83$

الوسط الحسابي $= 9.83$ هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة .

الوسيط : نرتب البيانات تصاعديا 6 , 8 , 8 , 10, 13 , 14

الوسيط $= \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9$

الوسيط $= 9$ هو المقياس المناسب لتمثيل البيانات لانه يتوسط البيانات ولا يوجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة مرتين هي : 8

$(5)\ 8, 10, 8, 9, 11, 4, 6, 54$ واجب

$(6)\ 8, 9, 8, 6, 10, 9, 11, 13, 14, 8, 6, 7, 19$

الحل :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{8+9+8+6+10+9+11+13+14+8+6+7+19}{13}$$

$$= \frac{128}{13} = 9.84$$

الوسط الحسابي $= 9.84$ هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة .

الوسيط : نرتب البيانات تصاعديا $6, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 13, 14, 19$

الوسيط $= 9$ هو المقياس المناسب لتمثيل البيانات لانه يتوسط البيانات ولا يوجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة مرتين هي : 8

تدرب وحل التمرينات

حدد العينة والمجتمع ثم صف اسلوب جمع البيانات وميز العينة المتحيزة من العينة غير متحيزة في كل مما يلي ، فسر اجابتك :

(7) يريد صاحب معمل التحقق من ان العمال يعملون بشكل جيد، فراقب احد العمال مدة ساعتين .

(8) يقف عدد من الطالبات عند مدخل المدرسة ويسألن كل عاشر طالبة تدخل المدرسة عن هواياتها المفضلة .

الحل :

(7) (i) العينة : احد عمال المعمل .

المجتمع : جميع العمال داخل المعمل .

(ii) اسلوب جمع البيانات : هو دراسة مسحية لمراقبة اداء احد العمال .

(iii) العينة غير متحيزة : لأن هذه العينة تتكون من عمال اختيروا عشوائيا .

(8) واجب

اي مقياس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات التالية ؟ فسر اجابتك

$(9)\ 34, 47, 41, 49, 39, 26, 40$ واجب

$(10)\ 6, 2, 4, 4, 3, 2, 6, 2, 4, 4, 20$

$(11)\ 5, 3, 5, 8, 5, 3, 6, 7, 4, 5$ واجب

(10)

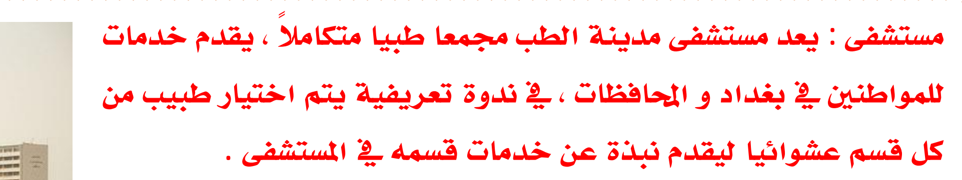
الحل : الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي 20 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة اربع مرات هي : 4

الوسيط : 4 هو المقياس الأنسب لتمثيل هذه البيانات لعدم وجود فجوة كبيرة في وسط البيانات

$2 , 2 , 2 , 3 , 4 , 4 , 4 , 4 , 6 , 6 , 20$

تدرب وحل مسائل حياتية



مستشفى : يعد مستشفى مدينة الطب مجمعا طبيا متكاملاً ، يقدم خدمات للمواطنين في بغداد و المحافظات ، في ندوة تعريفية يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائيا ليقدم نبذة عن خدمات قسمه في المستشفى .

(12) صف العينة و المجتمع .

(13) هل العينة متحيزة ام لا ؟ فسر ذلك .

الحل :

(12) العينة : طبيب من كل قسم .

المجتمع : أقسام مجمع مستشفى مدينة الطب .

(13) العينة متحيزة : لأن الأطباء الذين اختيروا من كل قسم عشوائيا .



(14) تسوق :يبين الجدول في ادناه عدد الزبائن الذين يرتادون محل لبيع الاجهزة الكهربائية في كل ساعة في احد الايام . أي مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب لوصف البيانات .

عدد الزبائن			
86	86	71	79
86	79	32	88
70	82	69	71
86	86	81	85

الحل :

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي 32 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة خمس مرات : 86

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا

$32, 69, 70, 71, 71, 79, 79, 81, 82, 85, 88, 86, 86, 86, 86, 86$

$$\text{الوسيط} = \frac{81 + 82}{2} = \frac{163}{2} = 81.5$$

الوسيط : 81.5 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

(15) تغذية : يبين الجدول في ادناه السعرات الحرارية لبعض الخضروات في طبق لكل نوع، اي مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب لوصف البيانات .

الخضروات	السعرات	الخضروات	السعرات
بصل	16	خيار	13
فلفل	20	ذرة	66
ملفوف	17	سبانخ	9
جزر	28	كوسا	17



الحل :

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي 66 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي .

المنوال : هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة واحدة متكررة مرتين ؛ 17

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا $9, 13, 16, 17, 17, 20, 28, 66$

$$\text{الوسيط} = \frac{17+17}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

الوسيط: 17 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات

فكر

(16) تحدًّ :اوجد مجموعة من الاعداد يكون وسيطها اصغر من وسطها الحسابي .

الحل : الاعداد هي : $6 , 10 , 14 , 3 , 7$

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}} = \frac{6+10+14+3+7}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

الوسيط : نرتب البيانات تصاعديا $3 , 6 , 7 , 10 , 14$

الوسيط = 7

(17) أُصحِّح الخطأ : تقول سناريا ان الوسط الحسابي هو انسب مقاييس النزعة المركزية لتمثيل البيانات $20, 8, 4, 5, 3$ حدد خطأ سناريا وصححه .

الحل :

الوسط الحسابي : غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي 20 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي

المنوال : لا يوجد لعدم وجود تكرار .

الوسيط : نرتب القيم تصاعديا $3, 4, 5, 8, 20$

الوسيط : 5 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لأنه يتوسط البيانات ولا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات .

(18) حس عددي : في دراسة مسحية حول الدوام في مدرسة ثانوية ، وزعت استبانة على 50 طالبا ، فكانت نسبة 74% من الطلاب يفضلون الدوام الصباحي . هل هذه الدراسة موثوق بها ؟ بين ذلك .

الحل : كلا ليس موثوق بها لأن الدوام يخص جميع الطلبة والأنسب تكون الاستبانة لجميع طلبة المدرسة .

أكتب : سؤالاً عن معنى تريد اجابته من خلال دراسة مسحية .

الحل : في الدراسة المسحية : يتبين كون العينة التي تؤخذ معقولة أم لا .

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

البيانات والإحصاءات المضّللة

تعلم غالبا ما نلاحظ على واجهات المحال التجارية اعلانات تنزيلات نهاية الموسم لسلع معينة تُرغب الناظر من دخول المحل والتبضع منه .

فكرة الدرس :

- تميز البيانات المضّللة
- تميز الإحصاءات المضّللة

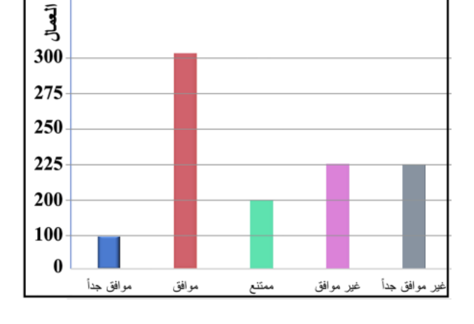
المفردات :

- البيانات المضّللة .
- الإحصاءات المضّللة .

تمييز البيانات المضّللة

البيانات المضّللة : هي البيانات التي تبرز صفة معينة لسلعة على نحو مبالغ فيه وعرض الحقائق بشكل يولد لدى الناظر انطباعا يروق لصاحب الاعلان وتضلل المستهلك .

مثال : يفكر صاحب مصنع تطبيق نظام جديد في العمل ، فوزع استبانة على العمال يسألهم عن رأيهم في النظام الجديد . هل التمثيل بالاعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الاستبانة ؟

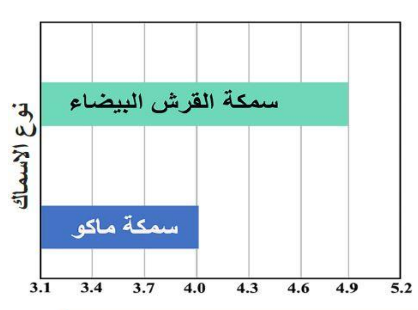


يبدو للوهلة الاولى ان معظم العمال موافقون على تطبيق النظام الجديد ، مع العلم ان اطوال المدة الزمنية للتدريج غيرمتساوية .

لاحظ ان : 450 عامل غير موافقين و غير موافقين جداً على هذا النظام الجديد ، في حين ان عدد الموافقين والموافقين جداً يزيد قليلاً على 400 عامل فقط ، وعليه فأن التمثيل البياني المعروض مضلّل ، والاستنتاج غير صادق .

ملاحظة : الرسم البياني قد يكون مضلّلاً ، بإطالة او تقصير الفترات بين قيم البيانات ، وذلك لاعطاء انطباع معين .

مثال : الرسم البياني المجاور يوضح العلاقة بين طولي القرش البيضاء الكبيرة وطول سمكة القرش ماكو . بين هل الرسم البياني مضلّل ؟ وضح ذلك .

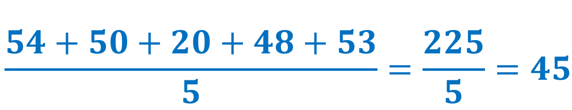


من الشكل المجاور ، نلاحظ ان طول العمود العلوي ضعف طول العمود السفلي .

ولكن القيمة المناظرة لطول العمود العلوي هي 4.9 والقيمة المناظرة لطول

العمود السفلي هي 4 وبالتأكيد قيمة 4.9 ليست ضعف 4 ، وعليه الرسم البياني المجاور مضلّل .

ملاحظة : عندما يبدأ الرسم البياني من الصفر، يصبح الرسم غير مضلّل .



تمييز الاحصاءات المضلّلة

الإحصاءات المضلّلة : بالاضافة الى الرسوم المضلّلة تستعمل الإحصاءات المضلّلة بهدف الترويج لشركة او بضاعة معينة ، بامعان النظر جيداً في معطيات الاعلان يمكن تمييز الإحصاءات المضلّلة .



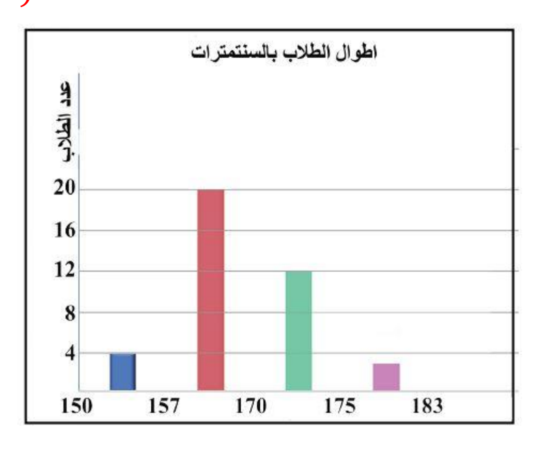
مثال : وضع صاحب محل للملابس الرجالية الاعلان الآتي :

(بدلات رجالية جديدة متوسط السعر 45 الف دينار) في المحل 5 نماذج من البدلات اسعارها بالالاف : $54, 50, 20, 48, 53$

الحل :

$$\frac{54+50+20+48+53}{5}=\frac{225}{5}=45$$

لاحظ ان متوسط اسعار البدلات الخمس 45 الف دينار ، الا ان بدلة واحدة فقط سعرها 20 الف دينار . حيث يقل سعرها عن هذا المتوسط . وهذا يجعل الزبون سوف يدفع اكثر من هذا السعر ثمنا للبدلة .



مثال : في استطلاع على 800 طالب اعدادية ، افاد 70 منهم انهم يرغبون دخول كلية الهندسة فيما قال 50 منهم ، بانهم يرغبون في دخول كلية الطب ، جاء في نتائج الاستطلاع ان الطلاب يفضلون الهندسة على الطب .

الحل :

ان مجموع الطلاب الذين شملهم الاستطلاع فعلاً هو $120=(50+70)$ طالبا من اصل 800 طالب ، اي ان العينة العشوائية كانت صغيرة جداًالنسبة المئوية للطلاب الذين شملهم الاستطلاع تساوي $\frac{120}{800}\times 100=15\%$

تأكد من فهمك

وضح كيف يمكن ان يُولّد كل من الرسمين البيانيين التاليين انطباعا مضلّلاً :

1)

اطوال الطلاب بالسنتمترات

الطول	عدد الطلاب
150 – 157	4
157 – 170	20
170 – 175	12
175 – 183	3

الحل : الرسم البياني يعطي انطباعا مضللا .

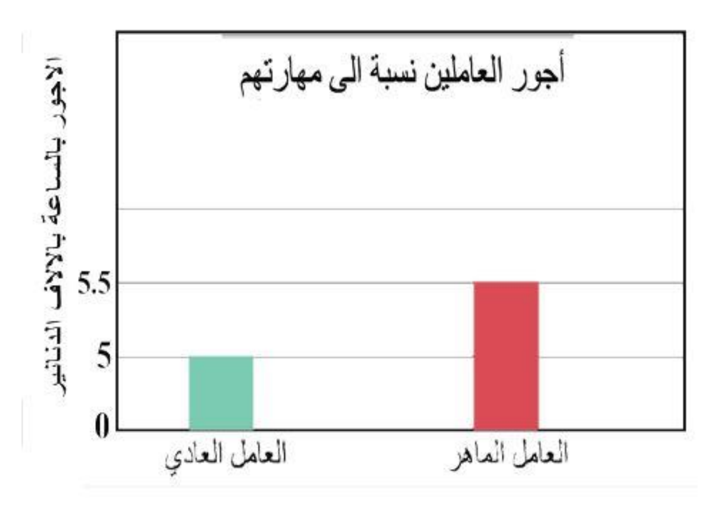
لأن النسب بين الأطوال غير متساوية وذلك لكون ان

النسبة الأولى : $(150-157)$ بينهما $7cm$

والنسبة الثانية : $(157-170)$ بينهما $13cm$

كذلك هو الحال في النسبة الثالثة : $(170-175)$ بينهما $5cm$

2)



الحل :

من الشكل المجاور نلاحظ ان أجور العامل الماهرين ضعف أجور العامل العادي . ولكن أجرة العامل الماهر بالساعة هي 5.5 الف دينار وأجرة العامل العادي بالساعة هي 5 الالف دينار . بالتأكيد 5.5 ليست ضعف 5 عليه الرسم البياني المجاور مضلل .

فسر لماذا الإحصاءات التالية مضلّلة :

3) عُرض مقال على 20 شخصا لتقويمه ، أبدى 13 منهم اعجابهم بالمقال ، بناءً على ذلكَ صرح صاحب المقال : بأن المقال صالح للنشر لان نسبة الذين فضلوه كانت 13 الى7 .

الحل : الاحصاء مضللا لأن :

١) يجب أن يكون عرض المقال بشكل عشوائي وليس انتخابي .

٢) يجب أن يحدد رأي الأشخاص ال 7 حول المقال .

4) باع مخزن ملابس رياضية لمدة زمنية معينة 320 بدلة رياضية ، في حين باع مخزن لبيع الالعاب والملابس الرياضية وللمدة نفسها 90 بدلة رياضية .

الحل : الاحصاء مضللا لأن الزمن ليس قياس لبيع البدلات الرياضية وانما :

١) يجب أن تكون البضاعة تمثل نفس النوعية ومن نفس المنشأ .

٢) الأسعار التي تباع بها البضاعة يجب أن تكون متساوية .

٣) موقع المخزنين يؤثر ونوع الزبائن والقدرة الشرائية .

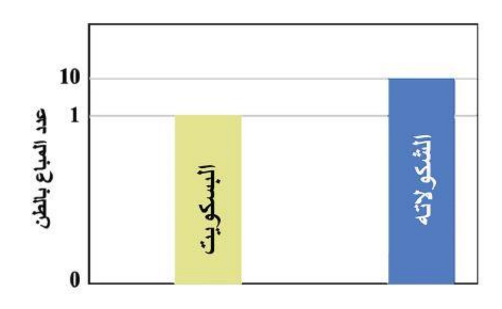
٤) الفترة الزمنية لفتح المخزن واغلاقه يوميا .

٥) أسلوب البائع في طرح البضاعة وكيفية تعامله مع الزبائن .

تدرب وحل التمرينات

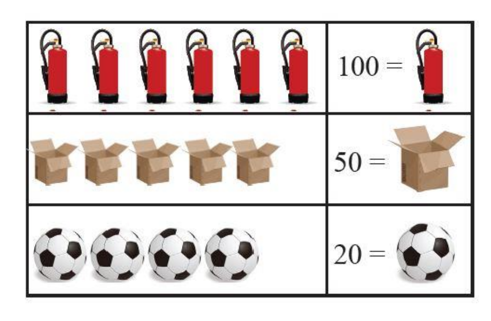
وضح كيف يمكن ان يولد كل من الرسمين البيانيين التاليين انطباعا مضلّلاً .

5) واجب





6)



الحل :

هنالك تضليل لأن النسبة بين الرسم والعدد غير متساوية للمواد حيث عدد الكرات المرسومة 4 كرات وعدد الكرات في خانة الاعداد 20 كرة حيث أن النسبة هي : (2 من 10) .

بينما في الخانة العليا (الصناديق) هنالك خمس صناديق وفي خامة العدد هناك 50 صندوق اي ان النسبة هي : (1 من 10)

7) في استطلاع شمل 6 اشخاص حول مطالعة جريدة يومية ، افاد 4 منهم انهم يفضلون الجريدة في نهاية الاستطلاع وردت الجملة الآتية : يفضل 2 من كل 3 اشخاص مطالعة الجريدة لماذا يُعد هذا الاعلان مضلّلاً ؟

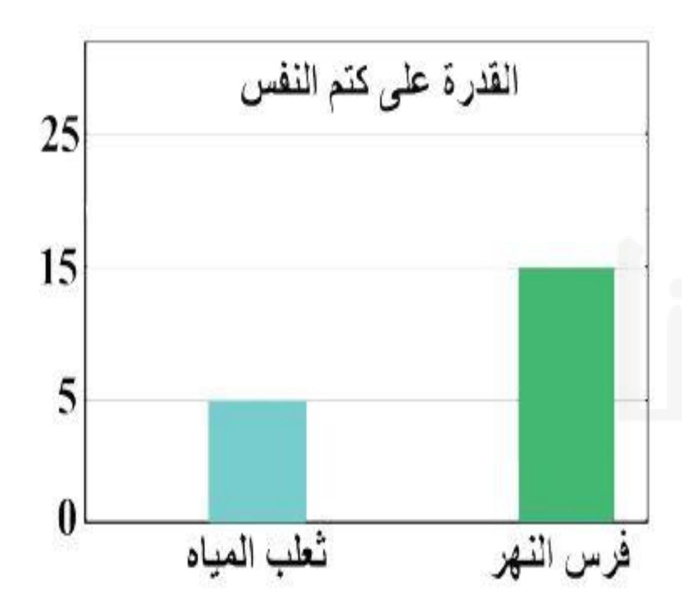
الحل : يعد هذا الإعلان مضللا لأن الاستطلاع شمل 6 أشخاص فقط فيجب أن يكون الاستطلاع عشوائي ويشمل أعداد كبيرة من الأشخاص ولكلا الجنسين ولأعمار متفاوتة ولطبقات مثقفة .

8) سئل 100 طالب عن الطريقة التي يفضلونها في القدوم الى المدرسة ، فكانت إجابات 60 طالبا منهم على النحو الآتي : 32 منهم يفضلون القدوم بواسطة سيارة الاجرة و 18 يفضلون المشي و 10 طلاب يفضلون القدوم بسياراتهم الخاصة . أستنتج ان نصف الطلاب يفضلون سيارة الأجرة . فسر لماذا الإحصاءات مضلّلة؟

الحل : الاحصاءات مضللة لأن الذين يفضلون سيارة الأجرة في القدوم الى المدرسة يمثل تقريبا $\left(\frac{1}{3}\right)$ ثلث إجابات 60 طالبا والاحصاء يجب أن يكون على عدد الطلاب 100 وليس على 60 طالب .

تدرب وحل مسائل حياتية

9) الاحياء : الرسم البياني المجاور يمثل القدرة على كتم النفس لفرس النهر وثعلب المياه . لماذا البيانات في الرسم مضلّلة ؟ وضح ذلك .



الحل : البيانات في الشكل البياني مضللة .

١) لان القدرة على كتم النفس في الأعمدة البيانية تبين بأن فرس النهر له قدرة ضعف قدرة ثعلب المياه ولكن في القيم العمودية للرسم البياني فأن قدرة فرس النهر ثلاث أمثال قدرة ثعلب المياه في كتم النفس .

٢) لأن يحدد في البيانات العمودية للرسم البياني التي تمثل الوقت هل هو دقائق أم ساعات أم أيام وهذا يعتبر مضللا .

10) مطالعة : الرسم المجاور يمثل اشخاص يفضلون مطالعة الكتب الادبية، العلمية، الفنية . فسر لماذا البيانات في الرسم مضلّلة؟

الحل :

في الاعمدة البيانية يتبين بأن قراءة الكتب الفنية أكبر من مجموع الذين يفضلون قراءة الكتب الأدبية والعلمية والواقع ان عدد القراء الذين يفضلون الكتب العلمية بالاضافة الى عدد قراء الكتب الأدبية اكبر من عدد الذين يفضلون الكتب الفنية لذلك فأن البيانات في الرسم مضللة .

11) مواصلات : بلغت ارباح شركة الطيران A في شهري تموز 5500 مليون دينار ، في حين كانت ارباح شركة الطيران B في شهري نيسان ومايس 7500 مليون دينار . فسر لماذا الإحصاءات مضلّلة ؟



الحل :

الاحصاءات مضللة لأن مقارنة الأرباح غير متطابقة فالشركة A أرباحها لشهري تموز وآب 5500 مليون دينار وأما الشركة B فأن ارباحها لشهري نيسان ومايس 7500 مليون دينار .

12) تغذية : تحتوي قصبة البروكلي على $477\ mg$ من البوتاسيوم والجزرة الكبيرة $230\ mg$ من البوتاسيوم في حين يحتوي رأس القرنبيط على $803\ mg$ من البوتاسيوم . فسر لماذا الإحصاءات هذه مضلّلة؟



الحل : الاحصاءات مضللة لأن المقارنة بين المواد الغذائية مختلفة .

فكر

13) اكتشف الخطأ : يقول محمد ان الرسم يكون غير مضلّل اذا بدأ رسم الاعمدة من الصفر بصرف النظر عن ثبوت طول الفترات . اكتشف خطأ محمد .

الحل :

يكون الرسم البياني مضللا اذا كان رسم الأعمدة لا يبدأ من الصفر وعدم ثبوت طول الفترة .

14) حس عددي : حصل احد الباعة على العمولات التالية بالالاف الدنانير :

شباط 965 ، اذار 170 ، نيسان 120 ، تموز 125 ، مايس 100

اخبر اصدقاؤه ان متوسط عمولته الشهرية 265 الف دينار . فسر لماذا هذا الاحصاء مضلّل ؟

الحل : لأن متوسط العمولة الشهرية 265 الف دينار هو ربع عمولة شهر شباط تقريبا وكذلك فأن متوسط العمولة يساوي ضعف العمولة للأشهر نيسان وتموز ومايس تقريبا .

15) ما الذي يجب ان تتأكد منه لتقرر ما اذا كان الرسم البياني مضلّلاً ام لا ؟

١- يبدأ الرسم البياني للاعمدة من الصفر .

٢- ثبوت الفترات المحددة في الرسم البياني .

أكتب : سؤال من الحياة اليومية تحتاج اليه لعمل رسوم مضلّلة . واجب

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

التباديل والتوافيق

تعلم :

دخل 4 اشخاص الى غرفة تحتوي على 4 كراسي في صف واحد وطلب منهم الجلوس على تلك الكراسي . فكم طريقة يمكن ان يجلسون ؟

فكرة الدرس :

- تعرف مضروب العدد
- الصحيح غير السالب
- تعرف مفهوم التباديل
- تعرف مفهوم التوافيق

المفردات :

- مضروب العدد
- التباديل
- التوافيق
- فضاء العينة

المضروب

اذا كان n عددا صحيحا غير سالب فأن : مضروب العدد n يرمز له $n!$ ويعرف بالعلاقة الاتية :

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1), n \in Z^+$$

وان $0! = 1$, $1! = 1$

مثال : دخل 4 اشخاص الى غرفة تحتوي صفا من 4 كراسي وطلب اليهم الجلوس على تلك الكراسي . كم طريقة يمكن ان يجلسون ؟

الحل :

❖ الشخص الاول الذي دخل الى الغرفة يمكن ان يجلس على اي كرسي ، اي له 4 اختيارات .

❖ الشخص الثاني يحق له ان يجلس على اي كرسي من الثلاثة الباقية ، اي له 3 اختيارات .

❖ الشخص الثالث يحق له ان يجلس على اي كرسي من الكرسيين الباقيين ، اي له 2 اختيار .

❖ اما الشخص الرابع فانه حتما سيجلس على الكرسي الاخير ، اي له 1 اختيار .

اذن عدد طرق الجلوس المكنة تساوي : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

لاحظ انك حصلت على النتيجة السابقة بضرب اعداد متتالية تبدأ من العدد (4) وتتناقص حتى تصل الى العدد (1)

تسمى مثل هذه الصورة مضروب العدد (4) ويرمز لها بالرمز $4!$

مثال : جد قيمة كل مما يأتي :

$i)\ 5!$ $\quad ii)\ 4! - 2!$ $\quad iii)\ \frac{7!}{5!}$ $\quad iv)\ 3! \times 2!$ $\quad v)\ \frac{(6-2)!}{0!}$ $\quad vi)\ \frac{6!}{3\times6}$

الحل :

$i)\ 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ (تقرأ مضروب العدد 5)

$ii)\ 4! - 2! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) - (2 \times 1) = 24 - 2 = 22$

$iii)\ \frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 6 = 42$

$iv)\ 3! \times 2! = (3 \times 2 \times 1) \times (2 \times 1) = 6 \times 2 = 12$

$v)\ \frac{(6-2)!}{0!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$

$vi)\ \frac{6!}{3 \times 6} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 6} = 5 \times 4 \times 2 = 40$

التباديل

التباديل : كم زوج مرتب يمكن تكوينه من الاحرف a , b , c ؟ باستخدام قاعدة الشجرة

$a \begin{smallmatrix}\to b \\ \to c\end{smallmatrix} \qquad b \begin{smallmatrix}\to a \\ \to c\end{smallmatrix} \qquad c \begin{smallmatrix}\to a \\ \to b\end{smallmatrix} \Longrightarrow (a , b), (a , c) , (b , a) , (b , c) , (c , a) , (c , b)$

هناك ستة ازواج مرتبة وهذا يعطي فكرة مبسطة عن التباديل التي سندرسها لاحقاً.

عدد التباديل لعناصر عددها n مأخوذة r في كل مرة هو ناتج قسمة $n!$ على $(n-r)!$ يرمز للتباديل بالرمز P_r^n أو $P(n , r)$ حيث

قانون التباديل $0 \le r \le n$ $\qquad P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$

ملاحظة : $r = 1$, $P_1^n = n$, $r = 0$, $P_0^n = 1$

$r = n$, $P_n^n = n!$

ملاحظة : يمكن معرفة حل السؤال وفق مفهوم التباديل من منطوق السؤال في الحالات الآتية فقط :

١) الترتيب مطلوب .

٢) طلب تكوين لجان وحدد لها مناصب مثل رئيس ، نائب رئيس ، ....

٣) طلب تكوين اعداد من مجموعة أرقام (بشرط عدم تكرار الرقم ، دون ارجاع ، مختلفة)

٤) طلب حل اسئلة امتحان مادة ما (بشرط عدم ترك أي سؤال) .

٥) أسئلة ترتيب صف في مستقيم أو الجلوس على كراسي .

مثال : جد قيمة كل مما يأتي :

$i)\ P_2^7 \qquad ii)P_3^3 \qquad iii)\ P_1^9 \qquad iv)\ P_0^{10}$

ط1 $\quad i)\ P_2^7 = \dfrac{7!}{(7-2)!} = \dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7\times 6\times 5!}{5!} = 7\times 6 = 42$

(اي نضرب بعدد مرات r) ط2 $\quad i)\ P_2^7 = 7\times 6 = 42$

حسب الملاحظة اعلاه

$$\left.\begin{array}{l} ii)P_3^3 = 3! = 3\times 2\times 1 = 6 \\ iii)\ P_1^9 = 9 \\ iv)\ P_0^{10} = 1 \end{array}\right\}$$

مثال : لوحة ارقام : لعمل لوحات ارقام مكونة من خمسة ارقام من بين الارقام 1 الى 9 . ما عدد الترتيبات المختلفة الممكنة ؟

الحل : بما ان ترتيب الارقام مهم فهذه الحالة تمثل تباديل .

$$n = 9 \quad , \quad r = 5$$

$$P_5^9 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4!}{4!} = 9\times 8\times 7\times 6\times 5 = 151200$$

التوافيق

كم مجموعة مكونة من عنصرين يمكن تكوينها من الاحرف a , b , c ؟

بما ان المجموعات غير خاضعة للترتيب اذن هناك ثلاث مجموعات هي : $\{a,b\} , \{b,c\} , \{a,c\}$

وهذا يعطي فكرة مبسطة على التوافيق والتي سندرسها لاحقا .

عدد التوافيق لعناصر عددها n مأخوذة r في كل مرة هو ناتج قسمة $n!$ على $(n-r)!\,r!$ يرمز للتوافيق بالرمز C_r^n أو $\binom{n}{r}$ حيث

قانون التوافيق $0 \le r \le n$

$$\binom{n}{r} = C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

ملاحظة :

$$C_0^n = 1 \quad , \quad r = 0 \quad , \quad C_1^n = n \quad , \quad r = 1$$

$$C_n^n = 1 \quad , \quad r = n$$

التوافيق لا يهم بها الترتيب .

ملاحظة : يمكن معرفة حل السؤال وفق مفهوم التوافيق من منطوق السؤال كالاتي :

- اذا كان لدينا عملية سحب أو تكوين لجنة أو فريق والترتيب فيها غير مطلوب .
- اذا طلب بالسؤال عدد طرق تكوين لجنة أو فريق ولم يحدد لها مناصب.
- طلب عدد المجموعات الجزئية (الثنائية $r = 2$ والثلاثية $r = 3$, ...)

■طلب عدد الأشكال الهندسية خط مستقيم $r = 2$ والمربع $r = 4$ والمثلث $r = 3$.

■طلب حل اسئلة امتحان مادة ما وفيها ترك في الاجابة عن الأسئلة .

مثال : جد قيمة كل مما يأتي :

$i)\ C_2^8 \qquad ii)\ C_{12}^{12} \qquad iii)\ C_1^9 \qquad iv)\ C_0^{50}$

الحل :

$$i)\ C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$C_2^8 = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8\times7\times6!}{6!\times(2\times1)} = \frac{8\times7}{2} = 4\times7 = 28 \quad \text{ط}1$$

$$C_2^8 = \frac{8\times7}{2\times1} = \frac{8\times7}{2} = 4\times7 = 28 \quad \text{ط}2$$

$ii)\ C_{12}^{12} = 1$

$iii)\ C_1^9 = 9$

$iv)\ P_0^{50} = 1$

} حسب الملاحظة اعلاه

مثال : وظائف : أعلنت شركة عن 4 وظائف شاغرة ، فتقدم 10 اشخاص ، بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الأربع ؟

الحل : بما ان ترتيب الوظائف غير مهم فهذه الحالة تمثل توافيق .

$$r = 4 \quad , \quad n = 10$$

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \Longrightarrow C_4^{10} = \frac{10!}{(10-4)!\ 4!}$$

$$C_4^{10} = \frac{10\times9\times8\times7\times6!}{6!\,(4\times3\times2\times1)} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = 10\times3\times7 = 210 \quad \text{ط}1$$

اذن هناك 210 طريقة لشغل الوظائف الأربع

$$C_4^{10} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = 10\times3\times7 = 210 \quad \text{ط}2$$

اي في الطريقة الثانية نقوم بضرب العدد في البسط بعدد مرات r وفي المقام نأخذ مضروب r .

تأكد من فهمك

جد قيمة كل مما يأتي :

1) $4!\times2! = (4\times3\times2\times1)\times(2\times1) = 24\times2 = 48$

2) $(3+2)! = 5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

3) $\frac{9!}{6!} = \frac{9\times8\times7\times6!}{6!} = 9\times8\times7 = 504$



4) $(7-5)! = 2! = 2 \times 1 = 2$

5) $3! + 2! = (3 \times 2 \times 1) + (2 \times 1) = 6 + 2 = 8$

6) $P_8^8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$

7) $P_4^{10} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

8) C_3^8 واجب

9) $\binom{9}{0} = 1$

تدرب وحل التمرينات

جد قيمة كل مما يأتي :

10) $2! \times 6! = (2 \times 1) \times (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 2 \times 720 = 1440$

11) $4! \times 3!$ واجب

12) $0! \times 1! = (1) \times (1) = 1$

13) $P_0^{10} = 1$

14) $\binom{10}{1} = 10$

15) $C_5^9 = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 7 \times 2 = 126$

16) P_3^7 واجب

17) $P_1^{15} = 15$

18) $C_{100}^{100} = 1$

تدرب وحل مسائل حياتية

19) لجان : بكم طريقة يمكن اختيار لجنة ثلاثية من بين هيئة مكونة من 5 شخصا ؟

الحل : $n = 5 \quad , \quad r = 3$

$$C_3^5 = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$$

20) لجان : بكم طريقة يمكن اختيار لجنة ثلاثية مكونة من رئيس ونائب الرئيس وامين الصندوق من بين هيئة مكونة من 5 شخصا ؟

الحل : تحديد مناصب يحل بالتباديل $n = 5 \quad , \quad r = 3$

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \Longrightarrow P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$



21) شطرنج : في التصفية النهائية لبطولة الشطرنج في احدى المدارس بين اربعة طلاب . كم عدد المباريات التي يمكن اجراؤها للتصفية ؟

الحل : الترتيب غير مهم يحل بالتوافيق $n = 4 \quad , \quad r = 2$

$$C_2^4 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{12}{2} = 6$$



22) لوحات : رسم فنان 7 لوحات فنية ، فبكم طريقة يمكنه اختيار 5 لوحات منها لعرضها في معرض فني؟

الحل : الترتيب غير مهم يحل بالتوافيق $n = 7 \quad , \quad r = 5$

$$C_5^7 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6}{2} = \frac{42}{2} = 21$$



23) اختبار : ورقة اسئلة تحتوي على 12 سؤالاً والمطلوب الاجابة عن 10اسئلة بكم طريقة يمكن اختيار الاسئلة ؟

الحل : الترتيب غير مهم يحل بالتوافيق $n = 12 \quad , \quad r = 10$

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \Rightarrow C_{10}^{12} = \frac{12!}{(12-10)!\ 10!}$$

$$C_{10}^{12} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{(2 \times 1)\ (10!)} = \frac{12 \times 11}{2} = 6 \times 11 = 66$$



24) رياضة : أراد مدرس الرياضة اختيار فريق لكرة السلة من أصل 9 لاعبا ، بكم طريقة يمكنه تشكيل الفريق ؟

الحل : الترتيب غير مهم يحل بالتوافيق $n = 9 \quad , \quad r = 5$

عدد لاعبين كرة السلة 5 لاعبين



$$C_5^9 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 2 \times 7 = 126$$



25) عصائر : كم خيار لدى تمارة لاختيار 3 اقداح من أقداح تحتوي على عصير الفواكه الآتية : ليمون ، تفاح ، عنب ، موز ؟

الحل : الترتيب غير مهم يحل بالتوافيق $n = 4 \quad , \quad r = 3$

$$C_3^4 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4$$

فكر

26) تحد : جد قيمة

$i)\ \frac{15!\,9!}{14!\,10!}$

الحل :

$$\frac{(15\times 14!)\,9!}{14!\,(10\times 9!)}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}$$

$ii)\ \frac{5!}{3!\times 1!}\times\frac{6!}{5!\times 4!}$

الحل :

$$\frac{(5\times 4\times 3!)}{3!\times (1)}\times\frac{6\times 5!}{5!\times (4\times 3\times 2\times 1)}=20\times\frac{1}{4}=5$$

27) أيهما صحيح ؟ اختيار لجنة من 4 طلاب من مجموعة 7 طلاب ، فان عدد الاختيارات اما P_4^7 أو C_4^7 فسر اجابتك .

الحل : توافيق لأن الترتيب غير مهم

$$C_4^7=\frac{7\times 6\times 5\times 4}{4\times 3\times 2\times 1}=7\times 5=35$$

28) تبرير : متى تكون العبارة $C_r^n=C_r^m$ ؟

الحل : تكون $C_r^n=C_r^m$ اذا كانت $r=0$

29) تفكير ناقد : ما العلاقة بين تراتيب 3 من اصل 5 ، وتوافيق 3 من اصل 5 ؟ اكتب هذه العلاقة من خلال حسابك لكل منهما .

الحل :

$$P_r^n=\frac{n!}{(n-r)!}\Longrightarrow P_3^5=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2!}{2!}=5\times 4\times 3=60$$

$$C_3^5=\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}=5\times 2=10$$

$P_3^5=6C_3^5$ العلاقة

30) مسألة عددية : جد قيمة n التي تجعل $\frac{n!}{(n-1)!}=9$

الحل :

$$\frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!}=9\Longrightarrow n=9$$

أكتب : مسألة لاختيار 2 من بين 5 اشياء على ان يكون الترتيب فيها مهما .

الحل : الترتيب مهم يحل بالتباديل

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \Longrightarrow P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5\times4\times3!}{3!} = 5\times4 = 20$$

الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

تعلم : رمى مهند قطعتي نقود 13 مرة وسجل النتائج كما مبين في الجدول المجاور :

النتائج	التكرار
H , H	7
H , T	3
T , H	1
T , T	2

1) أوجد النسبة $\frac{\text{عدد ظهور (H ,T)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$

2) أوجد النسبة $\frac{\text{عدد ظهور (H ,T)}}{\text{عدد مرات التجربة}}$

فكرة الدرس :

- حساب الاحتمال التجريبي
- حساب الاحتمال النظري

المفردات :

- الاحتمال التجريبي
- الاحتمال النظري
- فضاء العينة

سبق ان درست حساب الاحتمال التجريبي والنظري حيث تحديد الاحتمال في الفقرة(تعلم)عن طريق اجراء التجربة والنواتج بهذه الطريقة تسمى الاحتمالات التجريبية .

اما الاحتمالات المبنية على حقائق وخصائص معروفة فتسمى الاحتمالات النظرية .

مثال : فضاء العينة لتجربة رمي قطعتي نقود هي :

النسبة في السؤال الاول :

$$\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

اذن عدد عناصر فضاء العينة يساوي 4

من الجدول عدد مرات ظهور الحدث H , T يساوي 3

الاحتمال نظري

$$P(H,T) = \frac{\text{عدد ظهور (H ,T)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} \Longrightarrow \therefore P(H,T) = \frac{3}{4}$$

النسبة في السؤال الثاني :

من الجدول عدد مرات ظهور الحدث H , T يساوي 3

$$P(H,T) = \frac{\text{عدد ظهور (H ,T)}}{\text{عدد مرات التجربة}} \Longrightarrow \therefore P(H,T) = \frac{3}{13}$$

عدد مرات التجربة يساوي 13

الاحتمال تجريبي

الاحتمالات النظرية تزودنا بنتائج التجربة دون الحاجة الى إجرائها (تعتمد على فضاء العينة للتجربة)

الاحتمالات التجريبية تزودنا بنتائج التجربة بتكرارها عدة مرات (تعتمد على تكرار التجربة)

مثال : وجد باحث في مصنع بطاريات السيارات ان احتمال كون البطارية غير صالحة هو $\frac{3}{20}$ انظري هذا الاحتمال ام تجريبي ؟ واذا اراد المصنع الحصول على 240 بطارية غير صالحة . فكم بطارية كان على المصنع انتاجه ؟

الحل :

هذا الاحتمال تجريبي ، لانه يعتمد على ما حدث فعلاً . استعمل التناسب لحل الجزء الثاني من المثال

كل 3 بطاريات من اصل 20 غير صالحة

اذن 240 بطارية غير صالحة من اصل x بطارية ينتجها المصنع

$$\frac{3}{20}=\frac{240}{x}\Longrightarrow 3x=4800\Longrightarrow \frac{3x}{3}=\frac{4800}{3}\Longrightarrow x=1600$$

∴ يجب ان ينتج المصنع 1600 بطارية

مثال : عند رمي حجري النرد مرة واحدة جد احتمال :

i) الحدث : الحصول على المجموع 5 على وجهي الحجرين .

ii) الحدث : الرقم على وجه الحجر الاول ضعف الرقم على وجه الحجر الثاني .



الحل : هذا الاحتمال نظري ؛ لان الحجرين رميا مرة واحدة .

عدد ارقام الحجر الاول $=6$ ، عدد ارقام الحجر الثاني $=6$

اذن حسب قانون العد الاساسي : عدد عناصر فضاء العينة تساوي 6×6 وتساوي 36

$$\Omega=\begin{Bmatrix}(1,1),\ldots,(1,6)\\(2,1),\ldots,(2,6)\\ \ldots\\(6,1),\ldots,(6,6)\end{Bmatrix}\qquad n=36$$

$$E_1=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}\qquad m=4$$

$$P(E_1)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

$$E_2=\{(2,1),(4,2),(6,3)\}\qquad m=3\quad ,n=36$$

$$P(E_1)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

الاحداث المتنافية

الحدثان المتنافيان : هما حدثان لايمكن ان يتحققا معا في تجربة واحدة .

مثلاً : عند رمي حجر النرد مرة واحدة ، فان الحصول على عدد فردي و عدد زوجي معا مستحيل اذن هما حدثان متنافيان .

حساب احتمال الحدثين المتنافيين :

اذا كان E_2 , E_1 حدثين متنافيين فان احتمال وقوع E_1 أو وقوع E_2 يساوي مجموع احتمالي الحدثين أي

$$P(E_1 or\ E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

مثال : عند رمي حجر النرد مرة واحدة ، جد احتمال الحصول على العدد 3 او على عدد زوجي .

الحل : بما انه لايمكن ان يظهر على وجه الحجر العدد 3 في الوقت نفسه مع عدد زوجي فان هذين الحدثين متنافيان .

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ فضاء العينة

$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$ احتمال الحصول على عدد 3

$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6}$ احتمال الحصول على عدد زوجي

$$P(E_1 or\ E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

اذن احتمال ظهور العدد 3 او عدد زوجي في رمي حجر النرد يساوي $\frac{2}{3}$

مثال : عند رمي حجري النرد مرة واحدة، جد احتمال الحصول على عددين متساويين او مجموع عددين يساوي 3

الحل :

$$E_1 = \{(1,1), (2,2), \ldots (6,6)\}$$

$$P(E_1) = \frac{E_1 \text{ عدد ظهور}}{\text{فضاء العينة}} = \frac{6}{36}$$

$$E_2 = \{(1,2), (2,1)\}$$

$$P(E_2) = \frac{E_2 \text{ عدد ظهور}}{\text{فضاء العينة}} = \frac{2}{36}$$

E_1 , E_2 حدثان متنافيان لا توجد عناصر مشتركة بينهما .

$$P(E_1 or\ E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

تأكد من فهمك

في تجربة رمي حجري النرد مرة واحدة، جد احتمال حدوث الاحداث الاتية :

1) العددان على وجهي الحجرين متساويان .

الحل : عدد عناصر فضاء العينة تساوي 6×6 وتساوي 36

$E = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \quad m = 6 \quad , \quad n = 36$

$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2) العدد على وجه الحجر الاول نصف العدد على وجه الحجر الثاني .

الحل : عدد عناصر فضاء العينة تساوي 6×6 وتساوي 36

$E = \{(1,2),(2,4),(3,6)\} \quad m = 3 \quad , \quad n = 36$

$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

3) مجموع العددين على وجهي الحجرين يساوي 10 .

الحل : عدد عناصر فضاء العينة تساوي 6×6 وتساوي 36

$E = \{(4,6),(6,4),(5,5)\} \quad m = 3 \quad , \quad n = 36$

$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

4) مجموع العددين على وجهي الحجرين اقل من 5 .

الحل : عدد عناصر فضاء العينة تساوي 6×6 وتساوي 36

$E = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(3,1),(2,2)\} \quad m = 6 \quad , \quad n = 36$

$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

5) أتجريبية الاحتمالات السابقة ام نظرية ؟

الحل : الاحتمالات السابقة نظرية لكون الحجران رميا مرة واحدة (لأنها تعتمد على فضاء العينة)

6) كيس فيه 4 كرات حمر، كرة خضراء ، كم كرة زرقاء يجب ان تضاف الى الكيس كي يكون احتمال سحب كرة حمراء $\frac{2}{3}$ ؟ انظري الاحتمال ام تجريبي ؟

الحل : نضع كرة زرقاء واحدة فقط في الكيس ليصبح عدد الكرات في الكيس (6) كرات .

الاحتمال تجريبي لأن عملية السحب ستتكرر عدة مرات .

7) وقف شخص في احدى تقاطعات مدينة بغداد فأحصى 25 سيارة شاهدها ، منها 13 سيارة صفر اللون، 7 سيارات بيض اللون ، 5 سيارات رصاصية اللون . قدر احتمال ان تكون السيارة التالية التي تجتاز التقاطع صفراء اللون . وما نوع الاحتمال انظري ام تجريبي ؟ اكتب النسبة بشكل كسر عشري ونسبة مئوية .

الحل : فضاء العينة $= 5 + 7 + 13 = 25$ ، الحدث 13 سيارة صفراء

أحتمال قدوم سيارة صفراء $P(E) = \frac{m}{n} = \frac{13}{25}$

الاحتمال تجريبي $\frac{13}{25} = \frac{13 \times 4}{25 \times 4} = \frac{52}{100} = 0.52 = 52\%$

8) عند رمي حجري نرد ، جد احتمال حصول على عددين مجموعهما 5 او مجموعهما 11 . هل الحدثان متنافيان بين ذلك .

الحل : عدد عناصر فضاء العينة تساوي 6×6 وتساوي 36

$$E_1 = \{(2,3),(3,2),(4,1),(1,4)\} \quad m = 4 \quad , \quad n = 36$$
$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{4}{36}$$
$$E_2 = \{(5,6),(6,5)\} \quad m = 2 \quad , \quad n = 36$$
$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{2}{36}$$
$$P(E_1 or\, E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

تدرب وحل التمرينات

في تجربة رمي حجري النرد مرة واحدة ، جد احتمال حدوث الاحداث الاتية :

9) مجموع العددين على وجهي الحجرين اكبر من 8 . واجب

10) مجموع العددين على وجهي الحجرين يساوي 12 . واجب

11) اجريت دراسة على 100 شخص ، فاجاب 15 منهم انهم يستعملون اليد اليسرى فاذا اجريت الدراسة على 400 شخص ، فكم تتوقع عدد الاشخاص الذين يستعملون اليد اليسرى ؟

الحل : نفرض عدد الاشخاص الذين يستعملون لليد اليسرى $= x$

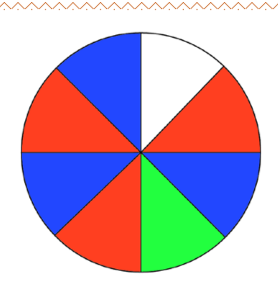
$$\frac{15}{100} = \frac{x}{400} \Rightarrow 100x = 6000 \Rightarrow \frac{100x}{100} = \frac{6000}{100} \Rightarrow x = 60$$

12) جد احتمال سحب بطاقة تحمل عدداً فرديا او تحمل عدداً من مضاعفات العدد 2 من بطاقات مرقمة من 1الى 9 .

الحل :

$$\Omega = \{1,2,3,\dots,9\} \qquad n = 9$$ فضاء العينة
$$E_1 = \{1,3,5,7,9\} \quad m = 5$$
$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{5}{9}$$ احتمال سحب بطاقة تحمل عددا فرديا
$$E_2 = \{2,4,6,8\} \quad m = 4$$
$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{4}{9}$$ احتمال سحب بطاقة تحمل عددا زوجيا
$$P(E_1 or\, E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

تدرب وحل التمرينات



13) تسلية : بأي لون يجب تلوين الفراغ بحيث يكون احتمال ان يأتي المؤشر عند هذا اللون $\frac{1}{4}$.

الحل : تلوين الفراغ باللون الاخضر .

14) طوابع : يهوى مهند جمع الطوابع البريدية ، فمن بين 60 طابعا جمع 25 طابعا للدول العربية ، 15 طابعا لدول افريقية و 20 طابعا لدول اوربية . قدر احتمال ان يكون الطابع الذي سيجمعه أوربيا .

الحل : عدد الطوابع للدول الاوربية $m = 20$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

15) رياضية : في التدريب على كرة السلة، اصاب لاعب السلة 15 كرة من 25 رمية ، ما الاحتمال التجريبي لان يصيب لاعب السلة في الرمية التالية ؟ اكتب الجواب على صورة كسر و عدد عشري و نسبة مئوية .

الحل : فضاء العينة (عدد الرميات) $n = 25$

عدد الرميات التي فيها اصابة $m = 15$

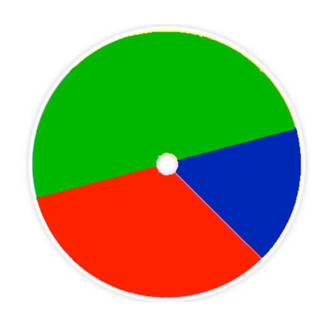
$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$$

16) دراسة : احصى رجل في عائلته 3 افراد عيونهم زرق من كل 22 فرداً، اذا رزق الرجل بمولود جديد ، ما احتمال ان تكون عيناه ليست زرقاء ؟

الحل : فضاء العينة $n = 22$ ، الافراد الذين ليسوا عيونهم زرق $m = 22 - 3 = 19$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{19}{22}$$

فكر



17) تحدٍّ : قرص ذو مؤشر ، مقسم الى ثلاثة اجزاء على الشكل المجاور : نصف القرص اخضر ثلثه احمر وسدسه ازرق . ما احتمال ان يدل مؤشر القرص على الأخضر او الأحمر بعد اطلاقه ؟

الحل :

القرص احمر $P(E_2) = \frac{1}{3}$ ، القرص اخضر $P(E_1) = \frac{1}{2}$

$$P(E_1 or\ E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$P(E_1 or\ E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$



17) أكتشف الخطأ : يريد كل من سارة و مهند تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء او حمراء عشوائيا من كيس يحتوي على 5 كرات زرق ، 4 كرات حمر ، 6 كرات صفر ايهما كانت اجابته صحيحة ؟ فسر اجابتك .

الحل : اجابة سارة هي الإجابة الصحيحة لأن الاختيار أما كرة زرقاء أو كرة حمراء فأن الاحتمال النهائي يكون جكع وليس ضرب .

أكتب : توضيحا لما يمثله كل عدد في الكسر $\frac{2}{9}$ الذي يمثل احتمال وقوع حدث نظري او تجريبي .

الحل : 2 يمثل عدد الاحتمالات (الحدث)

9 تمثل فضاء العينة

الاحداث المركبة



تشير تقارير شركة الخطوط الجوية العراقية الى وصول طائراتها في موعدها المحدد بنسبة $\frac{19}{20}$ ، كما تشيرالنسبة 2٪ الى فقدان الامتعة من الحالات فما احتمال وصول طائرة في موعدها مع فقدان الامتعة ؟

فكرة الدرس :

- حساب احتمال الاحداث المستقلة
- حساب احتمال الاحداث المترابطة

المفردات :

- الاحداث المستقلة
- الاحداث المترابطة

الاحداث المستقلة

سبق وان تعلمت مفهوم الاحداث المستقلة (نتيجة احدهما لا تؤثر في نتيجة الآخر) في هذا الدرس سوف نتعلم حساب احتمال الحوادث المستقلة ، اذا كان E_2, E_1 حدثين مستقلين فان احتمال وقوعهما معا يساوي حاصل ضرب احتمال E_1 في احتمال الحدث E_2 .

اي :

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

مثال : في فقرة تعلم :

ان احتمال وصول الطائرة في موعدها هو $P(E_1) = \frac{19}{20}$

ان احتمال فقدان الامتعة هو $P(E_2) = \frac{1}{50}$

ان وصول الطائرة في موعدها لايؤثر في فقدان الامتعة، هذا يعني ان الحدثين مستقلان

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = \frac{19}{20} \times \frac{1}{50} = \frac{19}{1000} = 0.019 = 1.9\%$$

مثال : كيس يحتوي على 3 كرات حمر ، 4 كرات خضر ، 5 كرات زرق ، سحبت منه كرة عشوائيا ثم اعيدت وسحبت كرة ثانية . جد احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء .

الحل : R كرات حمراء ، G كرات خضر

عدد الكرات الكلي $= 3 + 4 + 5 = 12$

$$P(R) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(G) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

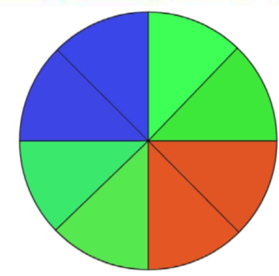
$$P(R \text{ and } G) = P(R) \times P(G) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

احتمال الاحداث المستقلة (لان الكرة الاولى اعيدت الى الكيس)

اذن احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء مع اعادة الكرة الحمراء يساوي $\frac{1}{12}$

مثال : اذا اختيرت احدى البطاقات المرقمة وتدوير مؤشر القرص الدواركما مبين في الشكل المجاور . ما احتمال ان يكون الناتج عدداً زوجيا واللون ازرق ؟





الحل : نفرض أن $P(E_1)$ أحتمال العدد زوجي

$$P(E_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

نفرض أن $P(E_2)$ أحتمال وقوف المؤشر على اللون الازرق

$$P(E_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

احتمال عدد زوجي ولون أزرق $P(E_1 \text{ and } E_2) = 12.8\%$

❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖❖

الاحداث المترابطة

الاحداث المترابطة (نتيجة احدهما تؤثر في نتيجة الآخر)

اذا كان E_2 و E_1 حدثين مترابطين فان احتمال وقوعهما معا هو حاصل ضرب احتمال الحدث الاول E_1 في ضرب (احتمال الحدث E_2 بعد حصول الحدث E_1) ، اي :

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \ after \ E_1)$$

مثال : كيس يحتوي على 3 كرات حمر ، 4 كرات خضر ، 5 كرات زرق ، سحبت منه كرة عشوائيا وسحبت كرة ثانية ولم نعيد الكرة الحمراء الى الكيس . ما احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء ؟

الحل : R كرات حمراء ، G كرات خضر

عدد الكرات الكلي $= 3 + 4 + 5 = 12$

$$P(R) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$P(G\ after\ R) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{4}{11} = \frac{1}{3}$$

$$P(R\ \text{and}\ G) = P(R) \times P(G\ after\ R) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{11} = \frac{4}{44} = \frac{1}{11}$$

اذن احتمال سحب كرة حمراء ثم خضراء دون اعادة الكرة الحمراء يساوي $\frac{1}{11}$

مثال : كيس يحتوي على 3 كرات حمر ، 4 كرات خضر ، 5 كرات زرق ، سحبت منه كرة عشوائيا وسحبت كرة صندوق فيه 5 كرات حمر ، 3 زرق ، 8 صفر ، سحبت كرة من الصندوق دون اعادتها ثم سحبت ثانيةً ، جد P(صفراء ثم حمر) .

الحل : عدد الكرات الكلي $= 5 + 3 + 8 = 16$

افرض $P(Y)$ سحب صفر ، $P(Y) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

عدم اعادة الكرة الصفراء ، اصبح في الصندوق 5 كرات حمراء ، 3 زرقاء ، 7 صفراء ، اي مجموعهما 15 كرة. سحبت كرة حمراء من الصندوق .

$$P(R\ after\ Y) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y\ \text{and}\ R) = P(Y) \times P(R\ after\ Y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

اذن احتمال سحب كرة صفراء ثم كرة حمراء دون اعادة الكرة الصفراء هو $\frac{1}{6}$

تأكد من فهمك

1) صندوق فيه 3 كرات حمراء ، 3 كرات خضر ، ما احتمال سحب كرتين خضر من دون اعادة الكرة الاولى ؟

الحل :

العدد الكلي للكرات $= 3 + 3 = 6$

$$P(G) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

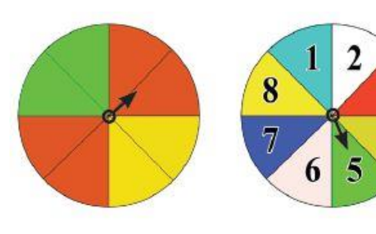
عدم اعادة الكرة الخضراء أصبح عدد الكرات في الصندوق 3 حمراء ، 2 خضراء اي ان مجموعهما $= 5$

$$P(G\ \text{after}\ G) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء المتبقية}}{\text{العدد الجديد للكرات}} = \frac{2}{5}$$

الحدثان مترابطان $P(G\ \text{and}\ G) = P(G) \times P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

2) اطلق مؤشر في القرصين المقابلين مرة واحدة ، ما احتمال ان يأتي مؤشر الاول على اللون الأحمر ومؤشر الثاني على العدد 5 ؟

الحل : العدد الكلي للارقام $= 8$





القرص الأول $P(E_1) = \frac{\text{إحتمال أن يأتي المؤشر على اللون الاحمر}}{\text{العدد الكلي للألوان}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

القرص الثاني $P(E_2) = \frac{\text{إحتمال أن يأتي المؤشر على العدد 5}}{\text{العدد الكلي للارقام}} = \frac{1}{8}$

حدثان مستقلان $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$

3) رمي قطعتي نقود مرة واحدة، ما احتمال ظهور صورة على القطعة الاولى ، وكتابة على القطعة الثانية .

الحل : العدد الكلي لظهور الصورة $= 2$

القطعة الأولى $P(E_1) = \frac{\text{إحتمال ظهور صورة على القطعة الأولى}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{1}{2}$

القطعة الثانية $P(E_2) = \frac{\text{إحتمال ظهور كتابة على القطعة الثانية}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{1}{2}$

حدثان مستقلان $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

تدرب وحل التمرينات

4) صندوق فيه 5 بطاقات حمر ، 4 بطاقات سود ، 6 بطاقات خضر .

سحبت بطاقة دون اعادتها للصندوق وسحبت بطاقة ثانية ، ما احتمال ان تكون البطاقة الاولى حمراء والثانية سوداء ؟

الحل : العدد الكلي للبطاقات $= 5 + 4 + 6 = 15$

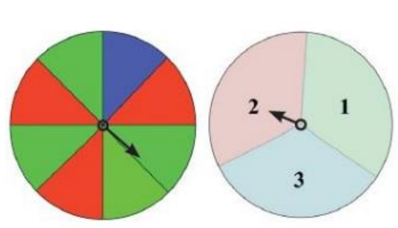
$P(R) = \frac{\text{عدد البطاقات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للبطاقات}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

عدم اعادة البطاقة الحمراء الى الصندوق أصبح عدد البطاقات 4 حمراء ، 4 سوداء ، 6 خضراء اي ان مجموعهما $= 14$

$P(B \text{ after } R) = \frac{\text{عدد البطاقات السوداء}}{\text{العدد الكلي للبطاقات}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

الحدثان مترابطان $P(B \text{ and } R) = P(R) \times P(B \text{ after } R) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$

5) اطلق مؤشر في القرصين المجاورين مرة واحدة ، ما احتمال ان يأتي مؤشر الاول على اللون الأخضر ومؤشر الثاني على العدد 3 ؟ واجب



6) رمي حجري النرد مرة واحدة ، ما احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على 3 على الحجر الاول ، وعدد يقبل القسمة على 5 على الحجر الثاني ؟

الحل : فضاء العينة للحجر الأول $= 6$

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$

الاعداد التي تقبل القسمة على 3 هي $m = 2$ ، $\{3, 6\}$

$$P(E_1) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

فضاء العينة للحجر الثاني $= 6$

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$

الاعداد التي تقبل القسمة على 5 هي $m = 1$ ، $\{5\}$

$$P(E_2) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$ حدثان مستقلان

تدرب وحل مسائل حياتية

7) حلوى : تحتوي علبة على 10 قطع حلوى بطعم الفراولة ، 15 قطعة بطعم الشكولاته ، 5 قطع بطعم الليمون . ما احتمال اختيار قطعتين عشوائيا الواحدة تلو الاخرى دون ارجاع على ان تكون الاولى بطعم الشوكلاته والثانية بطعم الليمون ؟

الحل : مجموع قطع الحلوى $= 5 + 15 + 10 = 30$

نفرض احتمال اختيار القطعة الأولى بطعم الشوكولاتة $P(E_1)$

$$P(E_1) = \frac{\text{عدد قطع الحلوى بطعم الشوكولاتة}}{\text{مجموع قطع الحلوى}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

عدم ارجاع قطع الشوكولاتة أصبحت العلبة تحتوي 10 قطع حلوى بطعم الفراولة 14 قطعة بطعم الشوكولاتة ، 5 قطع بطعم الليمون اي مجموع القطع الجديد $= 29$

نفرض احتمال اختيار القطعة الثانية بطعم الليمون $P(E_2)$

$$P(E_2 \text{ after } E_1) = \frac{\text{عدد قطع الحلوى بطعم الليمون}}{\text{مجموع قطع الجديد}} = \frac{5}{29}$$

$$P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{29} = \frac{5}{58}$$ الحدثان مترابطان

8) كتب : اختارت سها كتابا من رف في غرفتها واعادته ثم اختارت كتابا آخر ، ما احتمال ان يكون اختيار الكتاب من كتب الرياضيات؟ علما ان الرف يحتوي على 5 كتب رياضيات ، 2 كتاب لغة انكليزية ، 3 كتب علوم .

الحل : مجموع الكتب $= 3 + 2 + 5 = 10$

إحتمال إختيار كتاب الرياضيات الأول $P(E_1)=\frac{\text{عدد كتب الرياضيات}}{\text{مجموع الكتب}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

إحتمال إختيار كتاب الرياضيات الثاني $P(E_2)=\frac{\text{عدد كتب الرياضيات}}{\text{مجموع الكتب}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

حدثان مستقلان $P(E_1 \text{ and } E_2)=P(E_1)\times P(E_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

فكر

9) أكتشف الخطأ : يريد كل من جمانة واختها سالي تحديد احتمال اختيار كرة حمراء واخرى صفراء عشوائيا من كيس يحتوي 4 كرات حمراء ، 5 كرات صفراء دون ارجاع الكرة بعد السحب .

جمانة	سالي
P (حمراء وصفراء)	P (حمراء وصفراء)
P (حمراء)× P (صفراء)	P (حمراء)× P (صفراء)
$\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}$

ايهما كان حلها صحيحا ؟

الحل : العدد الكلي للكرات $= 5+4=9$

إحتمال إختيار كرة حمراء $P(R)=\frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}}=\frac{4}{9}$

عدم اعادة الكرة الحمراء أصبح 3 كرات حمراء ، 5 كرات صفراء فإن مجموع الكرات الجديد $= 8$

إحتمال إختيار كرة صفراء $P(Y \text{ after } R)=\frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}}=\frac{5}{8}$

الحدثان مترابطان $P(R \text{ and } Y)=P(R)\times P(Y \text{ after } R)=\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{20}{72}=\frac{5}{18}$

الحل الصحيح هو حل سالي

10) تحدًّ : عند رمي حجر النرد وقطعة نقود ، ما احتمال ظهور رقم اكبر من 2 واصغر من 6 على حجر النرد والكتابة على قطعة النقود ؟

الحل : فضاء العينة لحجر النرد : $n=6$

$\Omega=\{1,2,\dots,6\}$

احتمال ظهور رقم أكبر من 2 وأصغر من 6 هو $m=2$ ، $\{3,4,5\}$

$P(E_1)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

فضاء العينة لقطعة النقود : $n=2$

$\Omega=\{H,T\}$

احتمال ظهور كتابة هي $m=1$ ، $\{H\}$

$P(E_2)=\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$

حدثان مستقلان $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

11) مسألة مفتوحة: 10بطاقات بثلاثة اشكال مختلفة، اكتب مسألة تتعلق بسحب بطاقتين عشوائيا دون ارجاعهما على ان يكون الاحتمال $\frac{1}{15}$.

الحل : صندوق فيه 5 بطاقات صفراء , 3 بطاقات خضراء , 2 بطاقة حمراء سحبت بطاقة دون اعادتها للصندوق وسحبت بطاقة ثانية . ما احتمال ان تكون البطاقة الأولى حمراء والثانية خضراء . واجب

أكتب : مثالاً على حدثين مستقلين ومثالاً آخر على حدثين مترابطين .

مثال : تريد جمانة اختيار 3 اقداح من 5 اقداح تحتوي على عصير الفواكه :تفاح ، ليمون ، عنب ، موز ، اناناس .

بكم طريقة يمكنها الاختيار ؟

الحل :

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!\,(3!)} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$$

يمكن اختيار 10 طرائق

مثال : يراد تكوين عدد من اربع مراتب من مجموعة الارقام 1, 2, 3, 4, 5 دون تكرار الرقم في العدد ؟

الحل :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1!} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

مثال : كيس يحتوي على 5 كرات زرق ، 8 كرات خضر ، 7 كرات صفر .

جد :

i) ما نوع الاحتمال نظري ام تجريبي؟

ii) جد احتمال سحب كرة زرقاء واحدة

الحل :

i) الاحتمال نظري

ii) عدد الكرات $= 5 + 8 + 7 = 20$

$$P(E) = \frac{\text{عدد الكرات الزرقاء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

تدريب1 : تريد سالي ترتيب 4 كتب في خزانتها التي تحتوي على 6 رفوف ، شرط الا تضع اكثر من كتاب واحد على كل رف . كم خياراً لديها؟

الحل : الترتيب غير مهم فهي تحل بالتوافيق

$$r = 4 \quad , \quad n = 6$$

$$C_4^6 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3 \times 5 = 10 = 15$$

إختبار الفصل

1) وزع استبيان على 30 طالب من بين 100 طالب ، اجب عما يأتي :

i) حدد العينة والمجتمع الذي اختير منه .

ii) صف اسلوب توزيع الاستبيان .

iii) حدد ما اذا كانت العينة متحيزة ام لا .

الحل :

i)العينة : توزيع الاستبيان عل 30 طالب من بين 100 طالب .

المجتمع: 100 طالب .

ii) اسلوب توزيع الاستبيان : هي دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة.

iii)العينة غيرمتحرية : لأن هذه العينة تتكون من طلاب اختيروا عشوائيا.

2) كيف تميز بين الرسوم البيانية المضللة والرسوم البيانية غير المضللة ؟

الحل : 1) الرسم البياني المظلل لا يبدأ من الصفر بينما الرسم البياني غير المظلل يبدأ من الصفر .

2) عدم تساوي الفترات في الرسم البياني المظلل بينما تساوي الفترات في الرسم البياني غير المظلل .

3) جد ناتج ما يأتي :

$i)\ C_0^5 = 1$

$ii)\ P_0^5 = 1$

$iii)\ C_{10}^{10} = 1$

$iv)\ P_{10}^{10} = 10!$ واجب

$$v)\ P_5^7 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 3 = 21$$

$vi)\ P_5^7$

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \Longrightarrow P_5^7 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$$P_5^7 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

4) بكم طريقة يمكن اختبار لجنة مكونة من 3 طلاب من بين 8 طلاب ؟

الحل : الترتيب غير مهم لذا يحل التوافيق

$$r = 3 \quad , \quad n = 8$$

$$C_3^8 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 = 56$$

5) رمي حجر النرد 25 مرة وكانت النتائج كما موضح في الجدول التالي :

النتيجة	1	2	3	4	5	6
عدد المرات	2	6	3	5	2	7

i) نوع الاحتمال؟ ii) جد احتمال ظهور العدد 4 .

الحل : i) الاحتمال تجريبي .

ii) عدد المرات = 25

$$P(E) = \frac{\text{عدد مرات ظهور 4}}{\text{عدد المرات}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

6) في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة ، جد:

i) نوع الاحتمال نظري ام تجريبي .

ii) احتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على 4 .

الحل :

i) الاحتمال نظري

ii) فضاء العينة لحجر النرد : $n = 6$

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$$

احتمال ظهور العدد 4 هو $\{4\} \quad , \quad m = 1$

$$P(E) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$$

7) وقف مهندس في احدى تقاطعات مدينة بغداد، واحصى انواع السيارات عند التقاطع، من بين 20 سيارة شاهدها، احصى 10 سيارات صالون ، 7 سيارات نقل صغيرة لنقل الركاب، 3 سيارات حمل . قدر احتمال ان تكون السيارة التالية التي تجتاز التقاطع سيارة صالون .

الحل : العدد الكلي للسيارات = $10 + 7 + 3 = 20$

$$P(E) = \frac{\text{عدد سيارات الصالون}}{\text{عدد السيارات الكلي}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

تم بحمد الله